工业和信息化部“十二五”规划专著

随机偏微分方程有限元方法

杨小远　张英晗　李晓翠　著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京・BEIJING

内 容 简 介

本书系统介绍了随机抛物型、双曲型和椭圆型方程的有限元分析方法，全书共 6 章。第 1 章是预备知识，包括 Banach 空间和 Hilbert 空间中的几类有界线性算子、Sobolev 空间基本理论、算子半群、有限元方法的基础理论，以及无穷维随机积分的基本概念和性质；第 2 章介绍随机抛物型方程的有限元分析方法，其中包括确定性抛物方程有限元方法理论分析、自伴算和非自伴算子随机抛物方程的有限元分析方法；第 3 章对经典的随机 Navier-Stokes 方程进行有限元分析和后验误差估计，重点介绍了后验误差估计方法；第 4 章以分别带有 Q-Wiener 过程噪声项和带有 Brownian 片噪声项的两类随机弹性方程为例，介绍双曲型随机偏微分方程的有限元理论分析方法；第 5 章以随机 Poisson 方程和随机 Stokes 方程为例，介绍椭圆型随机偏微分方程的有限元理论分析方法；第 6 章介绍随机积分微分方程有限元理论分析方法。

本书可以作为高等学校应用数学和计算数学专业的高年级本科生、研究生、教师以及相关的科技工作者阅读、参考。

未经许可，不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。
版权所有，侵权必究。

图书在版编目（CIP）数据

随机偏微分方程有限元方法 / 杨小远，张英晗，李晓翠著．—北京：电子工业出版社，2015.5

ISBN 978-7-121-26008-7

Ⅰ. ①随…　Ⅱ. ①杨…　②张…　③李…　Ⅲ. ①偏微分方程—有限元法—研究　Ⅳ. ①O175.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 097117 号

责任编辑：竺南直
印　　刷：
装　　订：
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编　100036
开　　本：787×1 092　1/16　印张：16.5　字数：422 千字
版　　次：2015 年 5 月第 1 版
印　　次：2015 年 5 月第 1 次印刷
定　　价：48.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：（010）88258888。

前　　言

偏微分方程是反映有关未知变量偏导数之间制约关系的等式，许多领域中的数学模型都可以用偏微分方程来描述，很多重要的物理、力学等学科的基本方程本身就是偏微分方程。经典微分方程在过去几个世纪为人类认识自然规律、改造自然和自然和谐发展提供了有力的科学工具，如在人口问题、传染病理学和金融学中的应用等。但是随着科学的发展和对自然现象规律的进一步认识，原有经典微分方程已不能很好解释自然界中的一些偶发随机现象和小概率事件。

20 世纪中叶以来兴起的随机微分方程是数学中一个非常活跃的、引人瞩目的领域，国际上许多著名的数学家投入到这一领域的研究并获得了辉煌的成果。得益于随机国王中的牛顿定律，即 Itǒ随机分析思想以及由此发展的随机微分方程理论的帮助，人们对于自然界无处不在的随机现象有了越来越深刻的理解。由于随机偏微分方程能够很好的描述自然界中千变万化的各种自然现象，因此被广泛地应用于系统科学、工程控制、物理学、生物学和金融经济等领域。

由于随机偏微分方程的复杂性及其解并不是一个函数，而是一个随机过程，因此要形象地、直观地揭示随机方程所蕴含的信息，就需要求解随机偏微分方程的数值解。近些年来，随机偏微分方程数值解的问题已经引起了广泛的关注。由于求解各种特定类型问题的需要，促进了研究者对各种数值方法的探索，其中最有效的数值方法之一就是有限元方法。近几年来，作者对三类典型随机偏微分方程（抛物型随机方程、双曲型随机方程和椭圆型随机方程）的有限元分析方法做了系统研究，并且得到了一系列有意义的成果，本书对这些研究成果做了全面介绍。为了保持完整性和系统性，我们还对随机微分方程有限元方法领域中其他同行的最新研究成果等方面的资料进行了收集和整理，在书中进行了介绍，全书共分 6 章。

第 1 章介绍随机偏微分方程有限元分析所需要的预备知识，包括 Banach 空间和 Hilbert 空间中的几类有界线性算子、Sobolev 空间基本理论、算子半群、有限元方法的基础理论，以及无穷维随机积分的基本概念和性质；第 2 章介绍抛物型随机偏微分方

程的有限元分析方法，其中包括确定性抛物方程有限元方法理论分析、自伴算子随机抛物方程的有限元分析方法和非自伴算子随机抛物方程的有限元分析方法；第 3 章对经典的随机 Navier-Stokes 方程进行有限元分析和后验误差估计，并重点介绍了后验误差估计；第 4 章以分别带有 Q-Wiener 过程噪声项和带有 Brownian 片噪声项的两类随机弹性方程为例，介绍双曲型随机偏微分方程的有限元理论分析方法；第 5 章以随机 Poisson 方程和随机 Stokes 方程为例，介绍椭圆型随机偏微分方程的有限元理论分析方法；第 6 章介绍随机积分微分方程有限元理论分析方法。

希望本书的出版能够帮助对随机偏微分方程有限元方法这一领域感兴趣的读者基本掌握该领域的基础研究方法、快速了解该领域中的最新研究成果，为较早地进入国际前沿打好基础，从而促进我国在这一领域的研究上得到更好的发展。

在本书的编写过程中，中国科学院数学与系统科学研究院研究员严宁宁老师和北京计算科学研究中心研究员明炬老师曾经提出过许多宝贵意见，对此我们表示衷心的感谢。感谢国家自然科学基金（61271010）和北京市自然科学基金（4152029）所给予的支持。感谢电子工业出版社的大力支持和编辑们的辛勤劳动。由于作者水平有限，书中不妥之处、甚至错误在所难免，恳请专家及读者惠予赐教。

作　者

2015 年 4 月于北京

目　　录

第1章　基础知识

本章介绍Banach空间和Hilbert空间中的几类有界线性算子、Sobolev空间基本理论、算子半群、有限元方法的基础理论以及无穷维随机积分的基本概念和性质, 这些内容是随机微分方程有限元分析的基础.

1.1　Banach空间和Hilbert空间上的有界线性算子

本节简要介绍Banach空间和Hilbert空间上有界线性算子的概念和性质, 其中核算子和Hilbert-Schmidt算子是着重介绍的两类有界线性算子, 这两类算子在随机积分的定义中起着重要作用.

1.1.1　度量空间

定义 1.1.1 设X是一个非空集合, ρ是X上的双变量实值函数, 满足非负性、对称性和三角不等式, 即

(1) 对任意$x, y \in X$, $\rho(x, y) \geqslant 0$, 且$\rho(x, y) = 0$当且仅当$x = y$;

(2) 对任意$x, y \in X$, $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

(3) 对任意$x, y, z \in X$, $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

则称ρ为X上的一个距离, X为距离空间, 记作(X, ρ).

如果距离空间(X, ρ)中的点列$\{x_n\}$满足$\rho(x_n, x_m) \to 0\ (n, m \to \infty)$, 则称$\{x_n\}$是$X$中的Cauchy列(或基本列). 若$X$中任意基本列都在$X$中收敛, 则称$(X, \rho)$是完备的距离空间.

设A是距离空间(X, ρ)的子集, 如果A中的任意点列在X中有一个收敛子列, 则称A是列紧的. 若这个子列还收敛到A中的点, 则称A是自列紧的. 如果空间X是列紧的, 那么称X为列紧空间. 列紧空间必定是完备的空间.

设M是(X, ρ)中的一个子集, $\varepsilon > 0$, $N \subset M$. 如果对任意的$x \in M$都存在$y \in N$, 使得$\rho(x, y) < \varepsilon$, 则称N是M的一个ε-网. 如果N是一个有穷集合, 称N为M的一个有穷ε-网. 如果对$\forall \varepsilon > 0$, 都存在M的有穷ε-网, 则称集合M是完全有界的. 可以证明, 完备距离空间(X, ρ)中的集合M是列紧的, 当且仅当M是完全有界的.

M, N是距离空间(X, ρ)的两个子集且$M \subset N$, 若对任意$x \in N$, 都有M中点列$\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$, 使得当$n \to +\infty$时, $\rho(x_n, x) \to 0$, 则称M在N中稠密. 若距离空间X有可数的稠密子集, 则称X是可分的距离空间. 完全有界的距离空间是可分的.

设X是一个集合, $\mathcal{T}$是X的一个子集族, 如果$\{X, \emptyset\} \subset \mathcal{T}$并且$\mathcal{T}$关于有限交运算和任意并运算是封闭的, 则称$\mathcal{T}$是$X$的一个拓扑. 如果$\mathcal{T}$是集合$X$的一个拓扑, 则$(X, \mathcal{T})$称为拓扑空间, $\mathcal{T}$的每一个元素都叫做拓扑空间$(X, \mathcal{T})$中的一个开集. 根据拓扑的定义, 距离空间(X, ρ)中

的球形领域$\{B(x,r)=\{y\in X,\rho(x,y)<r\}:x\in X,r>0\}$是$X$的拓扑. 拓扑空间$X$中的集合$M$称为是紧的, 如果$X$中覆盖$M$的每个开集族都可以找到有限个开集覆盖集合$M$. 距离空间中的集合$M$是紧的当且仅当$M$是自列紧的.

设(M,ρ)是一个紧的距离空间, 令$C(M)$表示$M\to\mathbb{R}$的连续映射全体. 定义

$$d(u,v)=\max_{x\in M}|u(x)-v(x)|,\quad \forall u,v\in C(M).$$

则$(C(M),d)$是一个完备的距离空间. 设F是$C(M)$的子集, 如果存在常数$M_1>0$, 使得对任意的$x\in M,\phi\in F$, 都有$|\phi(x)|\leqslant M_1$, 则称F是一致有界的. 如果$\forall\varepsilon>0$, 存在$\delta=\delta(\varepsilon)>0$, 使得

$$|\phi(x)-\phi(y)|<\varepsilon,\quad \forall x,y\in M,\rho(x,y)<\delta,\forall\phi\in F,$$

则称F是等度连续的. 距离空间$(C(M),d)$中的紧集有如下特征, 此即著名的Arzela-Ascoli定理, 其证明可参考文献[1].

定理 1.1.1 (Arzela-Ascoli定理) $C(M)$的子集F是列紧集的充分必要条件是F是一致有界且等度连续的函数族.

设(X,ρ)为一个距离空间, $T:X\to X$是一个映射. 如果存在$x_0\in X$, 使得$x_0=Tx_0$, 则称x_0为T的一个不动点. 如果存在$0<\alpha<1$, 使得$\rho(Tx,Ty)\leqslant\alpha\rho(x,y)(\forall x,y\in X)$, 则称$T$是一个压缩映射.

定理 1.1.2 (压缩映射原理) 设(X,ρ)是一个完备的距离空间, $T:X\to X$是一个压缩映射, 则T在X上存在唯一的不动点.

证明 任取一点$x_0\in X$, 构造X中序列

$$x_{n+1}=Tx_n,\ n=0,1,2,\cdots,$$

则有

$$\rho(x_{n+1},x_n)=\rho(Tx_n,Tx_{n-1})\leqslant\alpha\rho(x_n,x_{n-1})\leqslant\cdots\leqslant\alpha^n\rho(x_1,x_0).$$

从而对任意的$p\in\mathbb{N}$,

$$\rho(x_{n+p},x_n)\leqslant\sum_{i=1}^{p}\rho(x_{n+i},x_{n+i-1})\leqslant\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_1,x_0)\to 0\quad(n\to\infty).$$

由此, $\{x_n\}$是X中的一个Cauchy列, 由(X,ρ)的完备性, $\{x_n\}$有极限, 记为x^*. 从$x_{n+1}=Tx_n$两边取极限(因T连续), 得

$$x^*=Tx^*,$$

即x^*为一个不动点.

如果x^{**}也是一个不动点, 则

$$|x^*-x^{**}|=|Tx^*-Tx^{**}|\leqslant\alpha|x^*-x^{**}|,$$

由此推出$x^*=x^{**}$, 所以不动点是唯一的. ¶

定义 1.1.2 设X是数域$\mathbb{K}$ (实数域或者复数域) 上的线性空间, $\|\cdot\|$是X上的一个实值函数, 满足非负性、正齐次性和三角不等式, 即

(1) 对任意$x \in X$, $\|x\| \geqslant 0$且$\|x\| = 0$当且仅当$x = 0$;

(2) 对任意$x \in X$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$;

(3) 对任意$x, y \in X$, $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

则称$\|\cdot\|$为X上的范数, X为数域$\mathbb{K}$上的线性赋范空间. 完备的线性赋范空间称为Banach空间.

设在线性空间X上给定了两个范数$\|\cdot\|_1$与$\|\cdot\|_2$, 如果存在常数$C_1, C_2 > 0$, 使得

$$C_1\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant C_2\|x\|_1, \quad \forall x \in X,$$

则称范数$\|\cdot\|_1$和$\|\cdot\|_2$为等价范数. 如果只研究X中的收敛性而不考虑距离本身的大小, 那么可以认为等价的范数决定同一种收敛性.

设X是一个线性空间, $E \subset X$, 称E为一个凸集, 如果

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in E, \quad \forall x, y \in E, 0 \leqslant \lambda \leqslant 1.$$

在非线性泛函分析不动点理论中, 有一个著名的不动点定理, 即如下Schauder不动点定理, 其证明可见参考文献[2].

定理 1.1.3 设C是赋范线性空间空间X中的一个闭凸子集, $T : C \to C$连续且$T(C)$列紧, 则T在C上至少有一个不动点.

设E是赋范线性空间X的一个子集, 称映射$T : E \to X$是紧的, 如果T是连续映射并且映E中的有界集为X中的列紧集. 由Schauder不动点定理, 设C是X中的一个闭凸子集, $T : C \to C$是紧的, 则T在C上至少有一个不动点.

定义 1.1.3 设X是复数域$\mathbb{C}$上的线性空间, $(\cdot, \cdot)$是$X \times X$到$\mathbb{C}$上的二元函数, 对$\forall x, y, z \in X$以及$\alpha \in \mathbb{C}$, 满足:

(1) $(x, x) \geqslant 0$, 且$(x, x) = 0$当且仅当$x = 0$;

(2) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;

(3) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$;

(4) $(x, y) = \overline{(y, x)}$.

则称$(\cdot, \cdot)$为X上的内积, 称X为具有内积$(\cdot, \cdot)$的内积空间. 完备的内积空间称为Hilbert空间.

设X为一个内积空间, 则X按范数$\|x\|=\sqrt{(x,x)}$构成一个赋范线性空间, 并且有Cauchy-Schwartz不等式

$$|(x,y)| \leqslant \|x\|\|y\|, \quad \forall x,y \in X,$$

其中等号成立当且仅当x与y线性相关.

M,N是内积空间X中两个非空子集, 如果

$$(x,y)=0, \quad \forall x \in M, y \in N,$$

则称M和N是正交的, 记做$M \perp N$. 称集合$\{x \in X | x \perp M\}$为M的正交补, 记做$M^{\perp}$. 设X是一个Hilbert空间, M是X上的一个闭线性子空间, 则对任意的$x \in X$, 存在唯一的正交分解:

$$x=y+z, \quad y \in M, z \in M^{\perp}.$$

由x的正交分解确定的y称为x在M上的正交投影.

设X为一个Hilbert空间, $S=\{e_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$是$X$中的正交规范集, 即

$$(e_\lambda, e_\mu)=0, \ \|e_\lambda\|=1, \quad \forall \lambda, \mu \in \Lambda, \lambda \neq \mu,$$

则如下三个条件等价:

(1) S构成X的一个基, 即$x=\sum\limits_{\lambda \in \Lambda}(x,e_\lambda)e_\lambda, \forall x \in X$.

(2) S是完备的, 即$S^{\perp}=\{0\}$.

(3) Parseval等式成立, 即$\|x\|^2=\sum\limits_{\lambda \in \Lambda}|(x,e_\lambda)|^2, \forall x \in X$.

对于Hilbert空间中的闭凸子集, 成立如下的最佳逼近定理, 其证明可见参考文献[1].

定理 1.1.4 设C是Hilbert空间H中的一个闭凸子集, 则对任意的$y \in H$, 存在唯一的$x_0 \in C$, 使得$\|y-x_0\|=\inf\limits_{x \in C}\|x-y\|$.

1.1.2 线性算子与线性泛函

设$(X,\|\cdot\|_X)$, $(Y,\|\cdot\|_Y)$是复(或实)数域$\mathbb{K}$上的两个线性赋范空间, $D \subset X$是X的线性子空间, T是D到Y的映射, D称为T的定义域, 记作$D(T)$. $R(T)=\{Tx | \forall x \in D\}$称为$T$的值域. 如果对任意$x,y \in D(T)$及$\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, 有

$$T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty,$$

则称T是一个线性算子. 如果

$$x_n \in D(T), x_0 \in D(T), x_n \to x_0 \Rightarrow Tx_n \to Tx_0,$$

则称线性算子T在$x_0 \in D(T)$处是连续的. 对于线性算子T, 它在$D(T)$内处处连续和在$D(T)$内的一点处连续是等价的. 如果存在常数$M>0$, 使得

$$\|Tx\|_Y \leqslant M\|x\|_X, \quad \forall x \in X,$$

则称线性算子T是X到Y的有界线性算子. 对于线性算子T, 它的有界性和连续性是等价的.

用$\mathcal{L}(X,Y)$表示X到Y的有界线性算子全体. 定义线性运算

$$(\alpha_1 T_1+\alpha_2 T_2)(x)=\alpha_1 T_1 x+\alpha_2 T_2 x,\quad \forall x\in X,\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{K},T_1,T_2\in\mathcal{L}(X,Y),$$

则$\mathcal{L}(X,Y)$在上述运算下构成一个线性空间. 定义$T\in\mathcal{L}(X,Y)$的范数

$$\|T\|=\sup_{x\in X,x\neq 0}\frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X},$$

则当Y是Banach空间时, $\mathcal{L}(X,Y)$按范数$\|T\|$构成一个Banach空间. 当$X=Y$时, 记$\mathcal{L}(X,Y)=\mathcal{L}(X)$.

特别当f是赋范线性空间X到数域$\mathbb{K}$的线性算子时, 称f是X上的线性泛函. 若f是X到数域$\mathbb{K}$的有界线性算子, 则称f为X上的有界线性泛函. X上有界线性泛函全体记作X^*, 称为X的共轭空间或对偶空间. $x^*\in X^*$在$x\in X$上的作用称为对偶积, 记做(x,x^*)或者$x^*(x)$.

对于Hilbert空间上的有界线性泛函, 有如下著名的Riesz定理, 其证明可见参考文献[1].

定理 1.1.5 *f是Hilbert空间X上的一个连续线性泛函, 则必定存在唯一的$y_f\in X$, 使得*

$$f(x)=(x,y_f),\quad \forall x\in X,$$

并且$\|f\|=\|y_f\|$.

设T是$D(T)\subset X\to Y$的线性算子, 如果$x_n\in D(T),x_n\to x$, 以及$Tx_n\to y$就能推出$x\in D(T)$, 而且$y=Tx$, 则称T是一个闭算子.

Banach空间中有四个著名的基本定理, 分别为Hahn-Banach泛函延拓定理, 一致有界定理, 逆算子定理和闭图像定理. 这些定理的证明可见参考文献[1], 下面不加证明地加以引用.

定理 1.1.6 *Banach空间基本定理:*

(1) (Hahn-Banach泛函延拓定理) 设f是赋范线性空间X的子空间Z上的连续线性泛函, 则必存在X上连续线性泛函$\tilde{f}$, 使得

$$\tilde{f}(x)=f(x),\forall x\in Z,\ \text{并且}\ \|\tilde{f}\|_X=\|f\|_Z,$$

即$\tilde{f}$是f的保范延拓.

(2) (一致有界定理) 设X,Y是Banach空间, $W\subset\mathcal{L}(X,Y)$是X到Y的有界线性算子的集合, 对任意的$x\in X$, 都有$\sup\limits_{A\in W}\|Ax\|<\infty$, 则存在常数$M$, 使得对任意的$A\in W$, $\|A\|\leqslant M$.

(3) (逆算子定理) 设X,Y是Banach空间, $T\in\mathcal{L}(X,Y)$既是单射又是满射, 则$T^{-1}\in\mathcal{L}(Y,X)$.

(4) (闭图像定理) 设X,Y是Banach空间, $T:X\to Y$是闭线性算子, 并且$D(T)$是X中的闭集, 则T是连续的.

设X,Y都是赋范线性空间, $T\in\mathcal{L}(X,Y)$, 算子$T^*:Y^*\to X^*$定义为

$$(T^*f)(x)=f(Tx),\quad (\forall f\in Y^*,x\in X).$$

称T^*为T的Banach共轭算子. 当$X=Y$为一个Hilbert空间时, $A\in\mathcal{L}(X)$, 则算子A的共轭算子定义为

$$(Ax,y)=(x,A^*y),\quad \forall x,y\in X.$$

如果$A=A^*$, 则称A为自共轭算子或自伴算子. 如果对任意的$x\in X$, $(Ax,x)\geqslant 0$, 称A为非负算子, 进一步如果存在常数$\alpha>0$, 使得$(Ax,x)\geqslant\alpha\|x\|^2$, 称$A$为正定算子.

Banach空间X中序列$\{x_n\}$称为是弱收敛的, 如果存在$x\in X$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x),\quad \forall f\in X^*,$$

记做$x_n\rightharpoonup x$, 称x为$\{x_n\}$的弱极限. 利用Hahn-Banach定理, 可以证明弱极限存在必定唯一, 极限若存在则弱极限也存在且二者相等.

设X,Y是Banach空间, $\{T_n\}\subset\mathcal{L}(X,Y),T\in\mathcal{L}(X,Y)$, 则有以下几种收敛性.

(1) 若$\|T_n-T\|\to 0$, 则称T_n一致收敛于T, 记做$T_n\rightrightarrows T$. 称T为$\{T_n\}$的一致极限.

(2) 若$\forall x\in X$, $\|(T_n-T)x\|\to 0$, 则称T_n强收敛于T, 记做$T_n\to T$. 称T为$\{T_n\}$的强极限.

(3) 若$\forall x\in X$, $T_nx\rightharpoonup Tx$, 则称T_n弱收敛于T, 记做$T_n\rightharpoonup T$. 称T为$\{T_n\}$的弱极限.

显然, 一致收敛可推出强收敛, 强收敛可推出弱收敛, 而且每种极限若存在必定是唯一的, 但相反的关系不成立. 下面的定理表明紧算子的一致极限是紧算子.

定理 1.1.7 *设紧算子序列$A_n:D\subset X\to Y,n=1,2,\cdots$, 算子$A:D\to Y$. 如果对于$D$中任何有界集$S$, 当$n\to\infty$时, $\|A_nx-Ax\|$都一致趋于零(关于$x\in S$), 那么$A:D\to Y$是紧算子.*

证明 先证A连续. 设$x_n\to x_0$, 则$S=\{x_0,x_1,\cdots\}$是D中的有界集. 于是$\forall\varepsilon>0$, 可取k, 使得

$$\|A_kx_n-Ax_n\|<\frac{\varepsilon}{3},\quad \forall n.$$

由A_k的连续性知存在N, 当$n>N$时, 有

$$\|A_kx_n-A_kx_0\|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

于是当$n>N$时,

$$\begin{aligned}&\|Ax_n-Ax_0\|\\ \leqslant\ &\|Ax_n-A_kx_n\|+\|A_kx_n-A_kx_0\|+\|A_kx_0-Ax_0\|\\ <\ &\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.\end{aligned}$$

故$Ax_n\to Ax_0$. A的连续性得证.

下证A的紧性. 设S是D中任一有界集. $\forall\varepsilon>0$, 由假设条件, 可选取n, 使得对任意的$x\in S$, 都有$\|A_nx-Ax\|<\varepsilon$. 故$A_n(S)$是$A(S)$的一个ε-网. 由于A_n是紧的, 所以$A_n(S)$是列紧集, 因此$A(S)$也是列紧集. ¶

定义 1.1.4 设X是Banach空间, $A: D(A) \subset X \to X$是闭线性算子, 称集合

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\}$$

为A的预解集, 预解集中的点称为是A的正则点或正则值. $\rho(A)$在$\mathbb{C}$中的补集称为A的谱集, 记做$\sigma(A)$, 谱集中的点称为A的谱点.

谱集中的点又可以分为以下几类.

(1) $(\lambda I - A)^{-1}$不存在, 则λ称为是A的特征值, 这部分λ的集合记做$\sigma_p(A)$, 称为A的点谱.

(2) $(\lambda I - A)^{-1}$存在, 且值域$R(\lambda I - A) = X$, 由逆算子定理, λ是正则值.

(3) $(\lambda I - A)^{-1}$存在, 且值域$R(\lambda I - A) \neq X$, 但$\overline{R(\lambda I - A)} = X$, 这部分$\lambda$的集合记做$\sigma_c(A)$, 称为$A$的连续谱.

(4) $(\lambda I - A)^{-1}$存在, 且$\overline{R(\lambda I - A)} \neq X$, 这部分$\lambda$的集合记做$\sigma_r(A)$, 称为$A$的剩余谱.

由以上分类, 有

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A).$$

设A是有界线性算子, 则A的谱集非空, 并且A的谱半径

$$r_\sigma(A) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$$

满足关系$r_\sigma(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$.

自伴紧算子的谱集有非常重要的性质, 即有下面的定理成立, 其证明可见参考文献[1].

定理 1.1.8 设A是Hilbert空间H上的自伴紧算子, 则

(1) A的非零谱点都是特征值;

(2) A的特征值都是实数, 至多可数个, 只能以零为聚点;

(3) 若H是无穷维的, 则$0 \in \sigma(A)$;

(4) 非零特征值对应的特征子空间是有限维的;

(5) 可分Hilbert空间H上的自伴紧算子A一定具有以特征向量组成的完备正交基.

1.1.3 核算子与Hilbert-Schmit算子

下面给出核算子和Hilbert-Schmit算子的定义, 并介绍其基本性质和结论.

定义 1.1.5 设E和G是两个Banach空间, E^*和G^*分别是它们的对偶空间, $T \in \mathcal{L}(E, G)$, 如果存在两个序列$\{a_j\} \subset G$, $\{\phi_j\} \subset E^*$使得

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|a_j\| \cdot \|\phi_j\| < \infty, \tag{1.1.1}$$

并且T可以表示为

$$Tx=\sum_{j=1}^{\infty}a_j\phi_j(x),\quad \forall x\in E,$$

则称T为E到G的核算子.

E到G的所有核算子在范数

$$\|T\|_1=\inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\|a_j\|\cdot\|\phi_j\|:Tx=\sum_{j=1}^{\infty}a_j\phi_j(x)\right\}$$

下, 构成一个Banach空间, 记为$\mathcal{L}_1(E,G)$, 并且当$E=G$ 时, 记$\mathcal{L}_1(E,E)=\mathcal{L}_1(E)$. 如果$K$也是Banach空间, $T\in\mathcal{L}_1(E,G)$和$S\in\mathcal{L}(G,K)$, 则$ST\in\mathcal{L}_1(E,K)$且$\|ST\|_1\leqslant\|T\|_1\|S\|$.

设H是一个可分的Hilbert空间, $\{e_j\}$是H的一组完备正交规范基. 如果$T\in\mathcal{L}_1(H,H)$, 则可以定义T的迹:

$$\mathrm{Tr}T=\sum_{j=1}^{\infty}(Te_j,e_j).$$

定理 1.1.9 *如果$T\in\mathcal{L}_1(H)$, 则$\mathrm{Tr}T$的值与H的正交基$\{e_k\}$的选取无关.*

证明 由核算子的定义, 存在两序列$\{a_j\}\subset H$和$\{\phi_j\}\subset H^*$满足

$$Tx=\sum_{j=1}^{\infty}a_j\phi_j(x),\quad \forall x\in H,$$

并且式(1.1.1)成立. 由Riesz表示定理1.1.5, 存在一序列$\{b_j\}\subset H$使得$\phi_j(x)=(x,b_j),\forall x\in H$. 则

$$(Te_k,e_k)=\sum_{j=1}^{\infty}(e_k,a_j)(e_k,b_j).$$

进一步有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}|(Te_k,e_k)|&\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|(e_k,a_j)(e_k,b_j)|\\&\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|(e_k,a_j)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|(e_k,b_j)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\&\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\|a_j\|\,\|b_j\|<\infty.\end{aligned}$$

于是

$$\sum_{k=1}^{\infty}(Te_k,e_k)=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(e_k,a_j)(e_k,b_j)=\sum_{j=1}^{\infty}(a_j,b_j).$$

因此$\mathrm{Tr}T$的定义与$\{e_j\}$的选取是无关的. ¶

进一步, 如果$T\in\mathcal{L}_1(H)$和$S\in\mathcal{L}(H)$, 则有$TS,ST\in\mathcal{L}_1(H)$且下面关系式成立:

$$\mathrm{Tr}TS=\mathrm{Tr}ST\leqslant\|T\|_1\|S\|. \tag{1.1.2}$$

核算子T的迹$\mathrm{Tr}T$与范数$\|T\|_1$有如下关系.

定理 1.1.10 自伴非负算子$T \in \mathcal{L}(H)$是核算子, 当且仅当存在H的一组完备正交规范基$\{e_j\}$, 使得

$$\sum_{j=1}^{\infty}(Te_j, e_j) < +\infty.$$

在这种情况下有$\mathrm{Tr}T = \|T\|_1$.

证明 首先证明T是一个紧算子. 令$T^{\frac{1}{2}}$表示非负算子T的均方根, 则对任意的$x \in H$,

$$T^{\frac{1}{2}}x = \sum_{j=1}^{\infty}(T^{\frac{1}{2}}x, e_j)e_j,$$

$$\begin{aligned}\left|T^{\frac{1}{2}}x - \sum_{j=1}^{N}(T^{\frac{1}{2}}x, e_j)e_j\right|^2 &= \sum_{k=N+1}^{\infty}|(T^{\frac{1}{2}}x, e_k)|^2 \\ &\leqslant \|x\|\sum_{k=N+1}^{\infty}\|T^{\frac{1}{2}}e_k\|^2 \\ &\leqslant \|x\|\sum_{k=N+1}^{\infty}(Te_k, e_k).\end{aligned}$$

即$T^{\frac{1}{2}}$是一个有限秩算子在算子范数下的极限, 因此$T^{\frac{1}{2}}$是一个紧算子, $T = T^{\frac{1}{2}}T^{\frac{1}{2}}$同样是一个紧算子. 令$\{f_j\}$为$T$的特征函数序列, 对应的特征值序列为$\{\lambda_j\}$. 则有

$$Tx = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k(x, f_k)f_k, \quad \forall x \in H.$$

又因为

$$(Te_j, e_j) = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k|(f_k, e_j)|^2,$$

所以有

$$\sum_{j=1}^{\infty}(Te_j, e_j) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k|(f_k, e_j)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k < \infty.$$

由上式可得T是一个核算子, $\mathrm{Tr}T = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k$并且$\mathrm{Tr}T = \|T\|_1$. ¶

定义 1.1.6 设E和F是两个可分的Hilbert空间, $T \in \mathcal{L}(E, F)$, 如果存在E的一组完备正交基$\{e_j\}$, 使得

$$\sum_{j=1}^{\infty}\|Te_j\|^2 < \infty, \tag{1.1.3}$$

则称T为Hilbert-Schmidt算子.

设$\{f_j\}$是F的一组完备正交基. 因为

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|Te_k\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|(Te_k,f_j)|^2=\sum_{j=1}^{\infty}|T^*f_j|^2,$$

所以Hilbert-Schmidt算子的定义与基$\{e_j\}$的选择是无关的. 定义范数

$$\|T\|_{\mathrm{HS}}:=\left(\sum_{j=1}^{\infty}\|Te_j\|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.1.4}$$

则有$\|T\|_{\mathrm{HS}}=\|T^*\|_{\mathrm{HS}}$. 令$\mathcal{L}_2(E,F)$表示空间$E$到$F$的Hilbert-Schmidt算子组成的集合, 如果以

$$(S,T)_2=\sum_{j=1}^{\infty}(Se_j,Te_j)$$

为内积, 则$\mathcal{L}_2(E,F)$构成可分的Hilbert空间, 内积$(\cdot,\cdot)_2$诱导的范数为$\|\cdot\|_{\mathrm{HS}}$. 当$E=F$时, 记$\mathcal{L}_2(E,E)=\mathcal{L}_2(E)$.

定理 1.1.11 设E,F,G是可分的Hilbert空间. 如果$T\in\mathcal{L}_2(E,F)$, $S\in\mathcal{L}_2(F,G)$, 则算子S与算子T的复合$ST\in\mathcal{L}_1(E,G)$, 且有

$$\|ST\|_1\leqslant\|S\|_{\mathrm{HS}}\|T\|_{\mathrm{HS}}.$$

证明 设$\{f_j\}$是空间F的一组完备正交基, 则

$$STx=\sum_{k=1}^{\infty}(Tx,f_k)Sf_k, x\in E,$$

因此

$$\|ST\|_1\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\|T^*f_j\|\|Sf_j\|\leqslant\left(\sum_{j=1}^{\infty}\|T^*f_j\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\|Sf_j\|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.1.5}$$

命题得证. ¶

1.2 Sobolev空间

Sobolev空间在随机偏微分方程的有限元方法分析中起着重要作用. 随机偏微分方程解的存在唯一性和正则性以及有限元方法的收敛性分析都是在Sobolev空间中来研究的. 本节对Sobolev空间有关理论以及随机偏微分方程有限元方法收敛性分析中需要用到的几类空间作扼要的介绍.

1.2.1 广义导数与Sobolev空间

设$d \in \mathbb{N}$, $\mathcal{D}$是$\mathbb{R}^d$中的开集, $u \in C(\overline{\mathcal{D}})$, 集合$\{x \in \mathcal{D} | u(x) \neq 0\}$关于$\mathcal{D}$的闭包称为是$u$关于$\mathcal{D}$的支集, 记做supp$u$. 对于非负整数$0 \leqslant k \leqslant \infty$, 令$C_0^k(\mathcal{D})$表示在$\mathcal{D}$内具有紧支集的全体$C^k(\overline{\mathcal{D}})$函数所组成的集合, 于是有

$$C_0^\infty(\mathcal{D}) \subset \cdots \subset C_0^{k+1}(\mathcal{D}) \subset C_0^k(\mathcal{D}) \subset \cdots \subset C_0^0(\mathcal{D}).$$

令α表示多重指标$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_d)$, 其中$\alpha_i (i = 1, 2, \cdots, d)$为非负整数, 记$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_d$.

定义 1.2.1 设$\{\phi_j\}_{j=1}^\infty \subset C_0^\infty(\mathcal{D}), \phi_0 \in C_0^\infty(\mathcal{D})$, 称序列$\{\phi_j\}$收敛于$\phi_0$, 如果

(1) 存在一个相对于$\mathcal{D}$的紧集$K \subset \mathcal{D}$, 使得supp$(\phi_j) \subset K (j = 0, 1, 2, \cdots)$;

(2) 对于任意的多重指标$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d)$, 有

$$\max_{x \in K} |\partial^\alpha \phi_j(x) - \partial^\alpha \phi_0(x)| \to 0 \quad (j \to \infty),$$

其中$\partial^\alpha \phi(x) = \frac{\partial^{\alpha_1} \cdots \partial^{\alpha_d}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}} \phi(x)$.

带有上述收敛性的线性空间$C_0^\infty(\mathcal{D})$称为基本空间, 记做$\mathfrak{D}(\mathcal{D})$. $\mathfrak{D}(\mathcal{D})$上的连续线性泛函称为广义函数. 一切广义函数的集合记做$\mathfrak{D}'(\mathcal{D})$.

$f \in \mathfrak{D}'(\mathcal{D})$在$\phi \in \mathfrak{D}(\mathcal{D})$上的作用记做$\langle f, \phi \rangle$. 在$\mathfrak{D}'(\mathcal{D})$上定义加法与数乘运算后, $\mathfrak{D}'(\mathcal{D})$构成一个线性空间. 在$\mathfrak{D}'(\mathcal{D})$中定义收敛性和广义导数如下.

定义 1.2.2 设$\{f_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathfrak{D}'(\mathcal{D})$, $f_0 \in \mathfrak{D}'(\mathcal{D})$, 如果

$$\langle f_j, \phi \rangle \to \langle f_0, \phi \rangle \quad (\forall \phi \in \mathfrak{D}(\mathcal{D})),$$

则称$\{f_j\}_{j=1}^\infty$收敛到f_0.

设$g \in \mathfrak{D}'(\mathcal{D})$, $f \in \mathfrak{D}'(\mathcal{D})$, 如果

$$\langle g, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial^\alpha \phi \rangle \quad (\forall \phi \in \mathfrak{D}(\mathcal{D})),$$

则称g是f的α阶广义导数, 记为$g = D^\alpha f$.

设$\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$是Lebesgue非空可测集, f是$\mathcal{D}$上Lebesgue可积函数, 定义范数

$$\|f\|_{L^p(\mathcal{D})} = \begin{cases} \left(\int_{\mathcal{D}} |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leqslant p < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathcal{D}} |f(x)|, & p = \infty. \end{cases}$$

则空间

$$L^p(\mathcal{D}) = \{f | \|f\|_{L^p(\mathcal{D})} < \infty\}, 1 \leqslant p \leqslant \infty,$$

在范数$\|f\|_{L^p(\mathcal{D})}$下成为Banach空间. 在不引起歧义的情况下, 范数$\|\cdot\|_{L^p(\mathcal{D})}$简记为$\|\cdot\|_p$. 设$p,q\geqslant 1,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,f\in L^p(\mathcal{D}),g\in L^q(\mathcal{D})$, 则$fg\in L^1(\mathcal{D})$, 并且有Hölder不等式

$$\|fg\|_{L^1(\mathcal{D})}\leqslant \|f\|_{L^p(\mathcal{D})}\|g\|_{L^q(\mathcal{D})}. \tag{1.2.1}$$

类似于连续函数空间中的Ascoli-Arzela定理, 空间$L^p(\mathcal{D})$中的列紧集有如下等价条件, 其证明可见参考文献[4].

定理 1.2.1 设$1\leqslant p<\infty$, 有界子集$K\subset L^p(\mathcal{D})$在$L^p(\mathcal{D})$中是列紧集当且仅当对任意的$\varepsilon>0$, 存在$\delta>0$和子集合$G\subset\mathcal{D}$, 使得对一切$u\in K$和$h\in\mathbb{R}^d,|h|<\delta$, 有

$$\int_{\mathcal{D}}|\tilde{u}(x+h)-\tilde{u}(x)|^p\mathrm{d}x<\varepsilon^p,$$

$$\int_{\mathcal{D}\setminus\bar{G}}|u(x)|^p\mathrm{d}x<\varepsilon^p,$$

其中

$$\tilde{u}(x)=\begin{cases}u(x), & x\in\mathcal{D},\\ 0, & x\in\mathbb{R}^d\setminus\mathcal{D}.\end{cases}$$

由于紧算子序列的算子范数极限是紧的, 由此论断又有如下定理.

定理 1.2.2 设$1\leqslant p<\infty$, $K\subset L^p(\mathcal{D})$. 假设存在一个具有下列性质的$\mathcal{D}$的子区域序列$\{\Omega_j\}$:

(1) 对每个j, $\Omega_j\subset\Omega_{j+1}$.

(2) 对每个j, 由K中的函数在Ω_j上的限制构成的集合是$L^p(\Omega_j)$中的列紧集.

(3) 对任意的$\varepsilon>0$, 存在j使得对一切$u\in K$, 有

$$\int_{\mathcal{D}\setminus\Omega_j}|u(x)|^p\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

则K是$L^p(\mathcal{D})$中的列紧集.

下面在$L^p(\mathcal{D})$的基础上定义一般的Sobolev空间. $\mathcal{D}$上的局部可积函数空间定义为

$$L^1_{\mathrm{loc}}(\mathcal{D})=\{f:f\in L^1(K),\forall 紧集K\subset\mathcal{D}\}.$$

由广义导数定义1.2.2, 如果存在$g\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathcal{D})$, 使得

$$\int_{\mathcal{D}}g(x)\phi(x)\mathrm{d}x=(-1)^{|\alpha|}\int_{\mathcal{D}}f(x)\partial^\alpha\phi(x)\mathrm{d}x,\quad \forall\phi\in C_0^\infty(\mathcal{D}), \tag{1.2.2}$$

则$f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathcal{D})$具有广义导数$D^\alpha f=g$.

定理 1.2.3 对任意整数$m \geqslant 0$和实数p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, 令

$$\begin{cases} \|v\|_{W^{m,p}(\mathcal{D})} = \|v\|_{m,p} = \left(\sum\limits_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} ||D^\alpha v||_p^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leqslant p < \infty, \\ \|v\|_{W^{m,\infty}(\mathcal{D})} = \|v\|_{m,\infty} = \max\limits_{|\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha v\|_\infty. \end{cases} \tag{1.2.3}$$

定义空间

$$W^{m,p}(\mathcal{D}) = \{u \in L^P(\mathcal{D}) : D^\alpha u \in L^p(\mathcal{D}), \forall 0 \leqslant |\alpha| \leqslant m\},$$

则在范数$\|v\|_{W^{m,p}}$下, $W^{m,p}(\mathcal{D})$是Banach空间.

证明 由式(1.2.3), $\|\cdot\|_{W^{m,p}(\mathcal{D})}$是范数是显然的, 所以只需证明$W^{m,p}(\mathcal{D})$在此范数下的完备性. 令$\{v_j\}$是$W^{m,p}(\mathcal{D})$中的任意Cauchy列, 即$\{D^\alpha v_j : |\alpha| \leqslant m\}$是$L^p(\mathcal{D})$中的Cauchy列. 由$L^p(\mathcal{D})$的完备性, 存在$v^\alpha \in L^p(\mathcal{D}), |\alpha| \leqslant m$, 使得在$L^p(\mathcal{D})$中$D^\alpha v_j$收敛到$v^\alpha$. 根据广义函数定义,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}} v^\alpha \phi(x) \mathrm{d}x &= \lim_{j \to \infty} \int_{\mathcal{D}} D^\alpha v_j \phi \mathrm{d}x \\ &= \lim_{j \to \infty} (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathcal{D}} v_j \partial^\alpha \phi \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathcal{D}} v \partial^\alpha \phi \mathrm{d}x, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathcal{D}), \end{aligned}$$

所以$v^\alpha = D^\alpha v$. 命题得证. ¶

$W^{m,p}(\mathcal{D})$中的半范数定义如下:

$$\begin{cases} |v|_{m,p} = \left(\sum\limits_{|\alpha| = m} ||D^\alpha v||_p^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leqslant p < \infty, \\ |v|_{m,\infty} = \max\limits_{|\alpha| = m} \|D^\alpha v\|_\infty. \end{cases} \tag{1.2.4}$$

当$p = 2$时, 在$W^{m,2}(\mathcal{D})$中定义内积

$$(u, v)_m = \sum_{|\alpha| \leqslant m} (D^\alpha u, D^\alpha v), \tag{1.2.5}$$

其中$(\cdot,\cdot)$表示$L^2(\mathcal{D})$中的内积. $W^{m,2}(\mathcal{D})$在内积$(\cdot,\cdot)_m$下构成一个Hilbert空间, 记做$H^m(\mathcal{D})$.

由于$C^\infty(\mathcal{D})$是$H^m(\mathcal{D})$的稠密子集, 定义

$$H_0^m(\mathcal{D}) = \overline{C_0^\infty(\mathcal{D})}^{H^m(\mathcal{D})},$$

即$H_0^m(\mathcal{D})$是$C_0^\infty(\mathcal{D})$在$H^m(\mathcal{D})$中关于范数$\|\cdot\|_{H^m(\mathcal{D})}$的闭包. 引入$H_0^m(\mathcal{D})$的对偶空间

$$H^{-m}(\mathcal{D}) = (H_0^m(\mathcal{D}))^*,$$

其范数为

$$\|g\|_{H^{-m}(\mathcal{D})} = \sup_{v \in H_0^m(\mathcal{D})} \frac{|(v, g)|}{\|v\|_{H^m}}, \ g \in H^{-m}(\mathcal{D}).$$

引入空间$H^m(\mathcal{D})$的半范数$|\cdot|_{H^m}$, $|v|_{H^m} = (\sum\limits_{|\alpha|=m} \|D^\alpha v\|_2^2)^{\frac{1}{2}}$, $v \in H^m(\mathcal{D})$, 则有著名的Poincaré不等式成立.

定理 1.2.4 (Poincaré不等式) 如果$\mathcal{D}$为连通且在一个方向上有界的区域, 则对于每个非负整数$m \in \mathbb{N}$, 存在一个常数$C_m = C > 0$, 使得

$$\|v\|_{H^m} \leqslant C|v|_{H^m}, \forall v \in H_0^m(\mathcal{D}).$$

即在空间$H_0^m(\mathcal{D})$中, 半范数$|\cdot|_{H^m}$也是范数, 且与$\|\cdot\|_{H^m}$等价.

1.2.2 Sobolev空间嵌入定理

首先给出嵌入和紧嵌入的概念. 设X, Y是两个线性赋范空间, 如果$X \subset Y$并且X到Y具有连续内射, 即存在常数$C > 0$使得

$$\|x\|_Y \leqslant C\|x\|_X, \ \forall x \in X,$$

则称X嵌入(连续地)到Y, 记做$X \hookrightarrow Y$. 如果$X \hookrightarrow Y$并且X到Y的内射是紧的, 即X中的有界集为Y中的紧集, 则称X紧嵌入到Y, 记作$X \Subset Y$.

设$m \in \mathbb{N}, \alpha \in (0, 1]$, 定义空间

$$C^{m,\alpha}(\overline{\mathcal{D}}) = \{u \in C^m(\overline{\mathcal{D}}) : \partial^\beta u\text{是}\alpha\text{次Hölder连续的}, |\beta| = m\}.$$

则$C^{m,\alpha}(\overline{\mathcal{D}})$在如下范数定义下是一个Banach空间:

$$\|u\|_{C^{m,\alpha}} = \|u\|_{m,\infty} + \max_{|\beta|=m} \sup_{x,y\in\mathcal{D}, x\neq y} \frac{|\partial^\beta u(x) - \partial^\beta u(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

如果对任意的$x \in \partial\mathcal{D}$, 存在$y_x \in \mathbb{R}^d, y_x \neq 0$和开集$U_x \subset \mathbb{R}^d$, 使得$x \in U_x$并且对任意的$z \in \overline{\mathcal{D}} \cap U_x$, $z + ty_x \in \mathcal{D}, \forall 0 < t < 1$, 则称$\mathcal{D}$具有线段性质. 设$\mathcal{D}$是有界区域, 如果区域$\mathcal{D}$在边界$\partial\mathcal{D}$的一侧, 并且对于边界$\partial\mathcal{D}$上的每一点$x$都存在邻域$U_x$, 使得$\partial\mathcal{D} \cap U_x$在某一局部坐标变换下可以用Lipschitz连续的函数来表示, 则称$\mathcal{D}$是有界L(或Lipschitz)型区域或者具有Lipschitz边界条件. Lipschitz型区域具有线段性质. 以后均假定区域$\mathcal{D}$具有线段性质. 下面是Sobolev空间中的嵌入和紧嵌入定理, 其详细证明见文献[4].

定理 1.2.5 设$m \geqslant 0$为整数, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$是有界开的连通区域, 且具有Lipschitz边界条件, 则下面嵌入关系成立:

(1) 当$m < n/p$时, $W^{m+k,p}(\mathcal{D}) \hookrightarrow W^{k,q}(\mathcal{D})$, $1 \leqslant q \leqslant np/(n - mp)$;

(2) 当$m = n/p$时, $W^{m+k,p}(\mathcal{D}) \hookrightarrow W^{k,q}(\mathcal{D})$, $1 \leqslant q < \infty$;

(3) 当$m > n/p$时, $W^{m+k,p}(\mathcal{D}) \hookrightarrow C^k(\overline{\mathcal{D}})$;

特别地,

(4) 当$m < n/p$时, $W^{m,p}(\mathcal{D}) \hookrightarrow L^q(\mathcal{D})$, $1 \leqslant q \leqslant np/(n - mp)$;

(5) 当$m = n/p$时, $W^{m,p}(\mathcal{D}) \hookrightarrow L^q(\mathcal{D})$, $1 \leqslant q < \infty$;

(6) 当$m > n/p$时, $W^{m,p}(\mathcal{D}) \hookrightarrow C(\overline{\mathcal{D}})$.

定理 1.2.6 *在定理1.2.5的假定下, 下述紧嵌入关系成立:*

$$W^{m,p}(\mathcal{D}) \Subset \begin{cases} L^q(\mathcal{D}), & \forall 1 \leqslant q < p^*, \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}, \quad m < \frac{n}{p}, \\ L^q(\mathcal{D}), & \forall q \in [1, \infty), \qquad\qquad\qquad m = \frac{n}{p}, \\ C^0(\overline{\mathcal{D}}), & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad m > \frac{n}{p}. \end{cases}$$

现在举例说明上述嵌入定理的特例. 设$1 \leqslant p < \infty$, $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$是有界开的连通区域, 具有Lipschitz边界条件, 则

(1) $H^1(\mathcal{D}) \Subset L^2(\mathcal{D})$.

(2) $W^{1,p} \Subset L^p(\mathcal{D}), W^{k+1,p} \Subset W^{k,p}(\mathcal{D})$.

(3) 若$\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, 则$H^2(\mathcal{D}) \Subset C^0(\overline{\mathcal{D}})$, 但$H^1(\mathcal{D})$不嵌入$C^0(\overline{\mathcal{D}})$.

1.2.3 迹定理

由于空间$L^p(\mathcal{D})$中元素是等价类, 在零测度集$\partial\mathcal{D}$上可以无定义, 因此Sobolev空间中元素在区域边界$\partial\mathcal{D}$上的迹需要重新定义.

具有线段性质的区域$\mathcal{D}$有如下性质, 其证明见文献[4].

引理 1.2.1 *如果区域$\mathcal{D}$具有线段性质, 则对任意的$1 \leqslant p < \infty$, $C^0(\overline{\mathcal{D}})$在$W^{m,p}(\mathcal{D})$中稠密.*

由引理1.2.1知, 对任意的$u \in H^m(\mathcal{D})$, 存在$C^0(\overline{\mathcal{D}})$中序列$\{\phi_k\}$, 使得在$H^m(\mathcal{D})$中$\phi_k \to u$. 设$\phi_k$在边界$\partial\mathcal{D}$上的函数值记为$\gamma_0\phi_k$, 如果在某种意义下$\gamma_0\phi_k \to \mu$, 则可以定义$u$在$\partial\mathcal{D}$上的值$\gamma_0 u = \mu$. 对$\gamma_0$有如下结果成立, 其证明见文献[4].

定理 1.2.7 *存在常数$C > 0$, 使得*

$$\|\gamma_0\phi\|_{0,\partial\mathcal{D}} \leqslant C\|\phi\|_{1,\mathcal{D}}, \forall \phi \in C^1(\overline{\mathcal{D}}). \tag{1.2.6}$$

下面根据定理1.2.7定义空间$H^1(\mathcal{D})$中函数的边界值. 设$u \in H^1(\mathcal{D})$, 则存在$\phi_n \in C^1(\overline{\mathcal{D}})$, $n = 1, 2, \cdots$, 使得

$$\|\phi_n - u\|_{H^1} \to 0, \ (n \to \infty).$$

于是得

$$\|\phi_n - \phi_m\|_{H^1} \to 0, \ (n, m \to \infty),$$

即$\{\phi_n\}$是$H^1(\mathcal{D})$中的Cauchy列. 由定理1.2.7, 得

$$\|\gamma_0\phi_n - \gamma_0\phi_m\|_{0,\partial\mathcal{D}} \leqslant C\|\phi_n - \phi_m\|_{H^1} \to 0, \ (n, m \to \infty),$$

即$\{\gamma_0\phi_0\}$是$L^2(\partial\mathcal{D})$中的Cauchy列. 由$L^2(\partial\mathcal{D})$的完备性, 存在$\mu\in L^2(\partial\mathcal{D})$, 使得

$$\|\gamma_0\phi_n-\mu\|_{0,\partial\mathcal{D}}\to 0,\ (n\to\infty).$$

于是可以定义$\mu=\gamma_0 u$, 则有

$$\|\gamma_0 u\|_{0,\partial\mathcal{D}}\leqslant C\|u\|_{H^1},\quad \forall u\in H^1(\mathcal{D}). \tag{1.2.7}$$

所以$\gamma_0: H^1(\mathcal{D})\to L^2(\partial\mathcal{D})$是一个连续线性算子, 即$\gamma_0\in\mathcal{L}(H^1(\mathcal{D}),L^2(\partial\mathcal{D}))$. 称$\gamma_0$为迹算子或者边界值算子. 一般来说, 算子$\gamma_0: H^1(\mathcal{D})\to L^2(\partial\mathcal{D})$不是满射, 即$\gamma_0$的值域是$L^2(\partial\mathcal{D})$的一个真子空间, 记做$H^{\frac{1}{2}}(\partial\mathcal{D})$. 关于迹算子$\gamma_0$, 有如下定理成立, 其证明可见参考文献[4].

定理 1.2.8 设区域$\mathcal{D}$具有线段性质, 则

(1) $\mathrm{Ker}(\gamma_0)=H_0^1(\mathcal{D})$.

(2) γ_0的值域$H^{\frac{1}{2}}(\partial\mathcal{D})$是$L^2(\partial\mathcal{D})$的一个稠密子空间.

定义空间$H^{\frac{1}{2}}(\partial\mathcal{D})$上的范数

$$\|\mu\|_{\frac{1}{2},\partial\mathcal{D}}=\inf_{\upsilon\in H^1(\mathcal{D}),\gamma_0\upsilon=\mu}\|\upsilon\|_{H^1},\mu\in H^{\frac{1}{2}}(\partial\mathcal{D}), \tag{1.2.8}$$

则在此范数下, $H^{\frac{1}{2}}(\partial\mathcal{D})$是一个Banach空间. 记$H^{\frac{1}{2}}(\partial\mathcal{D})$的对偶空间为

$$H^{-\frac{1}{2}}(\partial\mathcal{D})=(H^{\frac{1}{2}}(\partial\mathcal{D}))^*.$$

其范数为

$$\|\mu^*\|_{-\frac{1}{2},\partial\mathcal{D}}=\sup_{\mu\in H^{\frac{1}{2}}(\partial\mathcal{D})}\frac{|\mu^*(\mu)|}{\|\mu\|_{\frac{1}{2},\partial\mathcal{D}}}. \tag{1.2.9}$$

由迹算子的定义过程可以看出,

$$H_0^1(\mathcal{D})=\{u\in H^1(\mathcal{D}):\gamma_0 u=0\}. \tag{1.2.10}$$

下面给出高次迹算子的定义. 设$\nu=(\nu_1,\cdots,\nu_d)$是$\partial\mathcal{D}$的单位外法向量, $\upsilon\in H^2(\mathcal{D})$, 在$\partial\mathcal{D}$上定义

$$\gamma_1\upsilon=\gamma_0\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial\nu}\right)=\sum_{i=1}^d\nu_i\gamma_0\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial x_i}\right). \tag{1.2.11}$$

同样可证

$$\gamma_1\in\mathcal{L}(H^2(\mathcal{D}),H^{\frac{1}{2}}(\partial\mathcal{D})), \tag{1.2.12}$$

以及

$$H_0^2(\mathcal{D})=\{\upsilon\in H^2(\mathcal{D}):\gamma_0\upsilon=\gamma_1\upsilon=0\}. \tag{1.2.13}$$

一般情况下, 若$\upsilon\in H^m(\mathcal{D})$, 则$\gamma_0\upsilon\in H^{m-\frac{1}{2}}(\partial\mathcal{D}),\gamma_1\upsilon\in H^{m-\frac{3}{2}}(\partial\mathcal{D})$.

综合以上讨论, 有下述迹定理成立[4].

定理 1.2.9 映射

$$\upsilon \to \{\gamma_0\upsilon, \gamma_1\upsilon\}: \quad H^m(\mathcal{D}) \to H^{m-\frac{1}{2}}(\partial\mathcal{D}) \times H^{m-\frac{3}{2}}(\partial\mathcal{D}) \tag{1.2.14}$$

是满射的连续线性映射.

由迹定理可以证明, Sobolev空间中成立如下的Green公式.

$$\int_{\mathcal{D}} u \cdot \partial\upsilon \mathrm{d}x = -\int_{\mathcal{D}} \partial_i u \cdot \upsilon \mathrm{d}x + \int_{\partial\mathcal{D}} u\upsilon \cdot \nu_i \mathrm{d}\sigma,\ i = 1, \cdots, d. \tag{1.2.15}$$

由式(1.2.15), 可以推导出下述几个Green积分公式:

$$\int_{\mathcal{D}} \mathrm{grad}u \cdot \mathrm{grad}\upsilon \mathrm{d}x = -\int_{\mathcal{D}} \Delta u \cdot \upsilon \mathrm{d}x + \int_{\partial\mathcal{D}} \frac{\partial u}{\partial \nu} \cdot \upsilon \mathrm{d}\sigma, \forall u \in H^2(\mathcal{D}), \upsilon \in H^1(\mathcal{D}). \tag{1.2.16}$$

$$\int_{\mathcal{D}} (u\Delta\upsilon - \upsilon\Delta u)\mathrm{d}x = \int_{\partial\mathcal{D}} (u \cdot \partial_\nu \upsilon - \upsilon \cdot \partial_\nu u)\mathrm{d}\sigma, \forall u, \upsilon \in H^2(\mathcal{D}). \tag{1.2.17}$$

$$\int_{\mathcal{D}} \Delta u \cdot \Delta\upsilon \mathrm{d}x = \int_{\mathcal{D}} \Delta^2 u \cdot \upsilon \mathrm{d}x + \int_{\partial\mathcal{D}} -\partial_\nu \Delta u \cdot \upsilon + \Delta u \cdot \partial_\nu \upsilon \mathrm{d}\sigma, \forall u \in H^4(\mathcal{D}), \upsilon \in H^2(\mathcal{D}). \tag{1.2.18}$$

1.2.4 Sobolev空间中的等价模定理

下面给出在有限元方法误差分析中起重要作用的等价模定理, 其证明可参考文献[4].

定理 1.2.10 设$P_k(\mathcal{D}), k \geqslant 0$为区域$\mathcal{D}$上次数不大于$k$的多项式全体, 令$N = \dim P_k(\mathcal{D})$, 再设$f_i \in (W^{k+1,p}(\mathcal{D}))^*, i = 1, 2, \ldots, N, p \in [1, \infty]$, 使得当$f_i(q) = 0, \forall 1 \leqslant i \leqslant N$, $q \in P_k(\mathcal{D})$时, 就有$q = 0$, 则存在常数$C_{\mathcal{D}} > 0$, 使得

$$\|u\|_{k+1,p} \leqslant C_{\mathcal{D}} \left[|u|_{k+1,p} + \sum_{j=1}^{N} |f_j(u)| \right], \forall u \in W^{k+1,p}(\mathcal{D}). \tag{1.2.19}$$

作为定理1.2.10的推论, 有下述Friedrichs不等式:

$$\|u\|_{H^1} \leqslant C \left[|u|_{H^1} + \left| \int_{\partial\mathcal{D}} u \mathrm{d}\sigma \right| \right], \forall u \in H^1(\mathcal{D}), \tag{1.2.20}$$

其中常数$C > 0$只与区域$\mathcal{D}$有关. 事实上, 在定理1.2.10中令$k = 0, p = 2$, $f_1(u) = \int_{\partial\mathcal{D}} u \mathrm{d}\sigma$, 则有

$$|f_1(u)| \leqslant |\partial\mathcal{D}|^{\frac{1}{2}} \|u\|_{0,\partial\mathcal{D}} \leqslant C_{\mathcal{D}} \|u\|_{H^1},$$

即$f \in (H^1(\mathcal{D}))^*$. 又若$\forall q_0 \in P_0(\mathcal{D}), q_0 \neq 0$, 则$f_1(q_0) = q_0|\partial\mathcal{D}| \neq 0$. 从而由定理1.2.10, 得Friedrichs不等式(1.2.20)成立.

同样可以证明, 如果$\Gamma_0 \subset \partial\mathcal{D}$并且$|\Gamma_0| > 0$, 则

$$\|u\|_{H^1} \leqslant C \left[|u|_{H^1} + \left| \int_{\Gamma_0} u \mathrm{d}\sigma \right| \right], \forall u \in H^1(\mathcal{D}). \tag{1.2.21}$$

在定理1.2.10中取$k = 0, p = 2, f_1(u) = \int_{\mathcal{D}} u \mathrm{d}x$, 又可得到下述Poincaré-Friedrichs不等式

$$\|u\|_{H^1} \leqslant C \left[|u|_{H^1} + \left| \int_{\mathcal{D}} u \mathrm{d}x \right| \right], \forall u \in H^1(\mathcal{D}), \tag{1.2.22}$$

其中$C > 0$是只与区域$\mathcal{D}$有关的常数.

1.2.5 Sobolev空间中的内插理论

这一小节介绍Sobolev空间内插理论的基本结论, 详细的证明可见参考文献[4–6].

设B_0, B_1是两个Banach空间, $B_1 \hookrightarrow B_0$. 对任一$u \in B_0, t > 0$, 令

$$K(t,u) \doteq \inf_{v \in B_1} (\|u - v\|_{B_0} + t\|v\|_{B_1}), \tag{1.2.23}$$

则$K(t,u)$是B_0上的范数. 对于$0 < \theta < 1, 1 \leqslant p \leqslant \infty$, 定义

$$\|u\|_{[B_0,B_1]_{\theta,p}} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty t^{-\theta p} K(t,u)^p \frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leqslant p < \infty, \\ \sup\limits_{0<t<\infty} t^{-\theta} K(t,u), & p = \infty, \end{cases} \tag{1.2.24}$$

则$\|\cdot\|_{[B_0,B_1]_{\theta,p}}$是$B_0$上的范数. 定义$B_0, B_1$的内插空间

$$[B_0, B_1]_{\theta,p} = B_{\theta,p} = \{u \in B_0 : \|u\|_{[B_0,B_1]_{\theta,p}} < \infty\}, \tag{1.2.25}$$

则有下述定理成立.

定理 1.2.11 在范数式(1.2.24)下, 内插空间$[B_0, B_1]_{\theta,p}$是一个Banach空间, 并且有嵌入关系

$$B_1 \hookrightarrow B_{\theta,p} \hookrightarrow B_0.$$

定理 1.2.12 对于Sobolev空间中的内插理论, 有下述结论:

(1) 对于任意的$1 < p < \infty$, 成立

$$\begin{aligned} L^p(\mathcal{D}) &= [L^1(\mathcal{D}), L^\infty(\mathcal{D})]_{1-\frac{1}{p},p}, \\ W^{k,p}(\mathcal{D}) &= [W^{k,1}(\mathcal{D}), W^{k,\infty}(\mathcal{D})]_{1-\frac{1}{p},p}. \end{aligned}$$

(2) 令$0 < s < 1$, 若$\mathcal{D}$有Lipschitz边界, 则

$$W^{k+s,p}(\mathcal{D}) = [W^{k,p}(\mathcal{D}), W^{k+1,p}(\mathcal{D})]_{s,p},$$

其范数等价于如下范数

$$\|u\|^p_{W^{k+s,p}(\mathcal{D})} = \|u\|^p_{W^{k,p}(\mathcal{D})} + \sum_{|\alpha|=k} \int_{\mathcal{D}} \int_{\mathcal{D}} \frac{|u^{(\alpha)}(x) - u^{(\alpha)}(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(3) 设$m \leqslant k$为整数, 当$(1-\theta)m + \theta k$为非整数时, 对$1 \leqslant p \leqslant \infty$, 有

$$W^{(1-\theta)m+\theta k,p}(\mathcal{D}) = [W^{m,p}(\mathcal{D}), W^{k,p}(\mathcal{D})]_{\theta,p}.$$

(4) 当$(1-\theta)m + \theta k$为整数时, 有

$$H^{(1-\theta)m+\theta k}(\mathcal{D}) = [H^m(\mathcal{D}), H^k(\mathcal{D})]_{\theta,2}.$$

但是对$p \neq 2$, 空间$W^{k+1,p}(\mathcal{D})$与$[W^{k,p}(\mathcal{D}), W^{k+2,p}(\mathcal{D})]_{\frac{1}{2},p}$是不同的.

下面介绍一类在随机偏微分方程有限元分析中起重要作用的Sobolev空间$\dot{H}^s$.

Laplace算子$-\Delta : D(-\Delta) \subset L^2 \to L^2$是一个线性的、自伴正定的、稠定的算子, 因此存在一非减、正的特征值序列$\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$和与之相对应的特征函数序列$\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$, 满足下列特征问题:

$$\begin{cases} -\Delta\phi(x) = \lambda\phi(x), & x \in \mathcal{D} \\ \phi(x) = 0, & x \in \partial\mathcal{D}, \end{cases}$$

并且$\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$构成空间$L^2$的一组完备正交基. 从而算子$-\Delta$可以定义为

$$-\Delta v = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (v, \phi_j)\phi_j,\ v \in D(-\Delta),$$

其中$D(-\Delta) = \{v \in L^2 : \sum\limits_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 |(v,\phi_j)|^2 < \infty\}$. 进一步定义算子$-\Delta$的分数阶形式

$$(-\Delta)^r v = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^r (v, \phi_j)\phi_j,\ r > 0.$$

对于$v \in D((-\Delta)^{\frac{s}{2}})$, 可以定义范数$\|\cdot\|_s$,

$$\|v\|_s = \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} v\| = ((-\Delta)^s v, v)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^s (v,\phi_j)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

如果以$\|\cdot\|_s$为范数, 则$\dot{H}^s := D((-\Delta)^{\frac{s}{2}})$是一个Hilbert空间. 对于非负整数$s$有

$$\dot{H}^s(\mathcal{D}) = \left\{ v \in H^s(\mathcal{D}) : \Delta^i v|_{\partial\mathcal{D}} = 0,\ 0 \leqslant i \leqslant \frac{s}{2} \right\},$$

并且范数$\|\cdot\|_s$与$\|\cdot\|_{H^s}$在空间$\dot{H}^s$中等价, 即存在常数$C_1 > 0$和$C_2 > 0$使得

$$C_1 \|v\|_s \leqslant \|v\|_{H^s} \leqslant C_2 \|v\|_s,\ \forall v \in \dot{H}^s.$$

1.2.6 Gronwall引理

本小节介绍有限元分析中经常用到的Gronwall引理, 其详细证明可见参考文献[7].

引理 1.2.2 设α, β, u为区间$I = [a, b]$上实值函数, β, u连续. 如果β在I上非负并且u满足如下不等式:

$$u(t) \leqslant \alpha(t) + \int_a^t \beta(s) u(s) \mathrm{d}s, \quad t \in I.$$

则

(1) 对任意的$t \in I$, 成立

$$u(t) \leqslant \alpha(t) + \int_a^t \alpha(s)\beta(s) \exp\left(\int_s^t \beta(r)\mathrm{d}r\right) \mathrm{d}s.$$

(2) 如果α为一个常数, 则

$$u(t) \leqslant \alpha \exp\left(\int_a^t \beta(s)\mathrm{d}s\right).$$

证明 定义

$$v(s) = \exp\left(-\int_a^s \beta(r)\mathrm{d}r\right)\int_a^s \beta(r)u(r)\mathrm{d}r,\ s\in I.$$

则v可微, 并且

$$\begin{aligned} v'(s) &= \left(u(s) - \int_a^s \beta(r)u(r)\mathrm{d}r\right)\beta(s)\exp\left(-\int_a^s \beta(r)\mathrm{d}r\right) \\ &\leqslant \alpha(s)\beta(s)\exp\left(-\int_a^s \beta(r)\mathrm{d}r\right). \end{aligned}$$

上式两边从a到t积分可得,

$$v(t) \leqslant \int_a^t \alpha(s))\beta(s)\exp\left(-\int_a^s \beta(r)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s.$$

于是

$$\begin{aligned} \int_a^t \beta(s)u(s)\mathrm{d}s &= \exp\left(\int_a^t \beta(r)\mathrm{d}r\right)v(t) \\ &\leqslant \int_a^t \alpha(s))\beta(s)\exp\left(\int_a^t \beta(r)\mathrm{d}r - \int_a^s \beta(r)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s. \\ &= \int_a^t \alpha(s))\beta(s)\exp\left(\int_s^t \beta(r)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

将上式代入条件不等式中, 得(1)成立.

如果α为常数, 则(1)中右端积分可以求出, 由微积分基本定理可得(2)成立. ¶

随机偏微分方程有限元分析中经常用到的是Gronwall引理的一个特殊的形式, 即如下引理.

引理 1.2.3 Gronwall引理的特殊形式:

连续形式: 设$C_1, C_2 \geqslant 0$, $\beta\in[0,1)$为常数, $\phi(t):[0,T]\to\mathbb{R}$是非负连续的函数, 如果

$$\phi(t) \leqslant C_2\int_0^t (t-s)^{-\beta+1}\phi(s)\mathrm{d}s + C_1, \forall t\in[0,T],$$

则存在一个常数$C = C(C_2, T, \beta)$使得

$$\phi(t) \leqslant CC_1,\ \forall t\in[0,T].$$

离散形式1 : 设$C_1, C_2 \geqslant 0, k > 0$, $\beta\in[0,1)$为常数, N是正整数, $t_i = ki$, $T = kN_k$, ϕ_j是非负的序列, 其中$j = 1, 2, \cdots, N$. 如果

$$\phi_j \leqslant C_1 + C_2 k\sum_{i=1}^{j-1} t_{j-i}^{-1+\beta}\phi_i,$$

则存在一个常数$C=C(C_2,T,\beta)$, 使得

$$\phi_j \leqslant CC_1.$$

离散形式2 : 设符号κ, ζ以及a_j, b_j, c_j, γ_j(j为非负整数)都非负, 满足

$$a_n+\kappa\sum_{j=0}^{n} b_j \leqslant \kappa\sum_{j=0}^{n}\gamma_j a_j+\kappa\sum_{j=0}^{n} c_j+\zeta,\ n \geqslant 0.$$

若对所有的j都有$\kappa\gamma_j<1$, 那么

$$a_n+\kappa\sum_{j=0}^{n} b_j \leqslant \mathrm{e}^{\kappa\sum\limits_{j=0}^{n}\frac{\gamma_j}{1-k\gamma_j}}\left(\kappa\sum_{j=0}^{n} c_j+\zeta\right),\ n \geqslant 0.$$

1.3 算子半群

算子半群理论在发展型偏微分方程中有着广泛的的应用. 本节简要陈述随机偏微分方程有限元方法分析中需要用到的有关算子半群的基本理论与方法, 更多算子半群的结果可见参考文献[8].

1.3.1 抽象函数

算子半群理论是建立在抽象函数的基础之上的, 因此为讨论算子半群, 需要了解抽象函数的有关知识, 例如抽象函数的各种收敛性, 抽象函数的微分与积分等等.

设Ω为n维欧式空间$\mathbb{R}^n$中的集合, $(E,\|\cdot\|)$是一个Banach空间, E^*为其对偶空间. Ω上映射$x:\Omega\to E$称为Ω到E中的抽象函数. 抽象函数有如下几种收敛性:

定义 1.3.1 设$x:\Omega\to E$是抽象函数, $t_0\in\Omega$.

(1) 如果对任意的$x^*\in E^*$,

$$\lim_{t\in\Omega,t\to t_0}|(x(t),x^*)-(x(t_0),x^*)|=0,$$

则称抽象函数x在t_0处弱连续.

(2) 如果

$$\lim_{t\in\Omega,t\to t_0}\|x(t)-x(t_0)\|=0,$$

则称抽象函数x在t_0处强连续(或连续).

若x在Ω上每点处都是弱(强)连续时, 则称x在Ω上是弱(强)连续的.

由以上定义, 显然抽象函数x在t_0处强连续, 则必在t_0处弱连续, 但相反的关系不一定成立.

Ω到Banach空间$\mathcal{L}(E)$的抽象函数通常称为算子值函数, 算子值函数又有以下几种收敛性.

定义 1.3.2 设$T:\Omega\to\mathcal{L}(E)$是算子值函数, $t_0\in\Omega$.

(1) 如果对任意的$x\in E, x^*\in E^*$,

$$\lim_{t\in\Omega,t\to t_0}|(T(t)x,x^*)-(T(t_0)x,x^*)|=0,$$

则称算子值函数T在t_0处弱连续.

(2) 如果对任意的$x\in E$,

$$\lim_{t\in\Omega,t\to t_0}\|T(t)x-T(t_0)x\|=0,$$

则称算子值函数T在t_0处强连续(或连续).

(3) 如果

$$\lim_{t\in\Omega,t\to t_0}\|T(t)-T(t_0)\|_{\mathcal{L}(E)}=0,$$

则称算子值函数T在t_0处一致连续.

若T在Ω上每点处都是弱(强或一致)连续时, 称T在Ω上是弱(强或一致)连续的.

显然, 算子值函数T的一致连续蕴含着强连续, 强连续蕴含着弱连续, 但是相反的结论都不一定成立.

下面考虑抽象函数的可微性.

定义 1.3.3 设Ω是$\mathbb{R}$中开集, $x:\Omega\to E$是一个抽象函数, $t_0\in\Omega$.

(1) 如果存在$x_0\in E$, 使得

$$\lim_{t\in\Omega,t\to t_0}\left\|\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}-x_0\right\|=0,$$

则称x在t_0处是强可微(或可微)的, 记x_0为$x'(t_0)$, 称为x在t_0处的强导数(或导数).

(2) 如果存在$x_0\in E$, 使得对任意的$x^*\in E^*$,

$$\lim_{t\in\Omega,t\to t_0}\left|\left(\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}-x_0,x^*\right)\right|=0,$$

则称x在t_0处是弱可微的, 同样记x_0为$x'(t_0)$, 称为x在t_0处的弱导数.

显然, x在t_0处强可微蕴含着弱可微, 反之却不一定成立. 如果x在t_0处弱可微, 则对任意的$x^*\in E^*$, $(x(t),x^*)$作为实值函数在t_0处可微, 且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x(t),x^*)|_{t=t_0}=(x'(t_0),x^*).$$

类似于数值函数可微必连续这个性质, 抽象函数也有类似的性质, 其证明可见参考文献[9].

定理 1.3.1 若抽象函数$x(t)$在t_0处弱可微, 则$x(t)$在t_0处强连续.

下面考虑抽象函数的积分.

定义 1.3.4 设x是区间$[a,b]$到E的抽象函数. 对$[a,b]$的任意一个划分$\pi : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, 记$\Delta = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |t_k - t_{k-1}|$, 作和

$$S = \sum_{k=1}^{n} x(\xi_k)(t_k - t_{k-1}), \xi_k \in [t_{k-1}, t_k].$$

如果存在$x_0 \in E$, 使得对任意的$\varepsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, 只要划分π满足$\Delta < \delta$, 对任意选取的$\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$, 总有

$$\|S - x_0\| < \varepsilon,$$

则称$x(t)$在$[a,b]$上是Riemann可积的, 称x_0为$x(t)$在$[a,b]$上的抽象积分, 记做$\int_a^b x(t)\mathrm{d}t = x_0$.

数值函数Riemann积分的许多性质在抽象函数Riemann积分中仍然成立.

定理 1.3.2 抽象函数的Riemann积分满足如下性质:

(1) 若$x(t)$在$[a,b]$上强连续, 则$x(t)$在$[a,b]$上Riemann可积.

(2) 若$x(t)$在$[a,b]$上弱可微且其弱导数$x'(t)$在$[a,b]$上Riemann可积, 则

$$\int_a^b x'(t)\mathrm{d}t = x(b) - x(a).$$

(3) 若$x(t)$在$[a,b]$上Riemann可积, 则$\forall x^* \in E^*$, 数值函数$(x(t), x^*)$在$[a,b]$上Riemann可积, 并且

$$\left(\int_a^b x(t)\mathrm{d}t, x^*\right) = \int_a^b (x(t), x^*)\mathrm{d}t.$$

(4) 若$x(t)$在$[a,b]$上Riemann可积, 则$x(t)$在$[a,b]$上有界.

类似于数值函数Riemann积分到Lebesgue积分的拓展, 抽象函数的积分也有类似的推广, 其中最为重要的一类是Bochner积分. Bochner积分的详细介绍见1.5.2节, 这里只给出几个常用的Bochner可积抽象函数空间的定义.

设$x : \Omega \to E$是抽象函数, 如果Ω可以分解为有限(可数)多个互不相交的可测子集Ω_k, 其中$k = 1, 2, \cdots, m$(或$\Omega_k, k = 1, 2, \cdots$), 并且$x$在每个$\Omega_k$上取常值, 则称$x$是有限(可数)取值函数. 如果对任意的$x^* \in E^*$, $(x(t), x^*)$作为数值函数是Ω上的Lebesgue可测函数, 则称x是Ω上的弱抽象可测函数. 如果存在可数取值函数序列$\{x_n(t)\}$, 使得$x_n(t)$几乎处处强收敛于$x(t)$, 则称$x(t)$是Ω上强抽象可测函数.

定义空间$L^p(\Omega, E), 1 \leqslant p \leqslant \infty$,

$$L^p(\Omega, E) \quad = \quad \left\{x(\cdot) : x \text{ 在 } \Omega \text{ 上强可测}, \int_\Omega \|x(t)\|^p \mathrm{d}t < \infty\right\}, \ 1 \leqslant p < \infty,$$

$$L^\infty(\Omega,E) \quad = \quad \left\{x(\cdot): x \text{ 在 } \Omega \text{ 上强可测}, \ \operatorname*{ess\,sup}_{t\in\Omega}\|x(t)\| < \infty\right\}.$$

可以证明[3], 空间$L^p(\Omega,E)$在范数

$$\|x\|_{L^p} \quad = \quad \left(\int_\Omega \|x(t)\|^p \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}, \ 1 \leqslant p < \infty,$$
$$\|x\|_{L^\infty} \quad = \quad \operatorname*{ess\,sup}_{t\in\Omega}\|x(t)\|,$$

下构成Banach空间. 当$\Omega = (a,b)$是一个区间时, 通常记做$L^p(a,b;E)$. 如果E是一个Hilbert空间, 则空间$L^2(a,b;E)$在内积

$$(x,y) = \int_a^b (x(t),y(t))_E \mathrm{d}t$$

下构成一个Hilbert空间.

下面将数值解析函数的有关结论推广到抽象解析函数并讨论抽象函数在复平面上的曲线积分. 设$\mathcal{D}$是复平面$\mathbb{C}$上的开区域, X是一个复Banach空间. 设$f(z)$是$\mathcal{D}$中定义的数值复变函数, 若f在$\mathcal{D}$中处处可微, 则f在$\mathcal{D}$中解析. 利用这一结论, 定义抽象解析函数如下:

定义 1.3.5 设$x: \mathcal{D} \to X$是抽象函数, 如果对任意的$x^* \in X^*$, $(x(z),x^*)$是$\mathcal{D}$中普通解析函数, 则称x是$\mathcal{D}$中弱抽象解析函数. 如果x在$\mathcal{D}$中处处强可微, 即极限

$$\lim_{z\in\mathcal{D},z\to z_0}\frac{x(z)-x(z_0)}{z-z_0}, \quad z_0 \in \mathcal{D},$$

在X中存在, 则称x是$\mathcal{D}$中强抽象解析函数.

显然, 强抽象解析函数一定是弱抽象解析函数. 文献[9]中已证, 相反的关系也是成立的.

定理 1.3.3 设$x: \mathcal{D} \to X$是弱抽象解析函数, 则x也是$\mathcal{D}$中强抽象解析函数.

由定理1.3.3, 弱解析性与强解析性是等价的, 统称为抽象解析函数. 下面给出抽象函数沿复平面中曲线积分的定义.

定义 1.3.6 设$x: \mathcal{D} \to X$是抽象函数, z_1, z_2是$\mathcal{D}$中任意两点, $\Gamma \subset \mathcal{D}$是连接$z_1$与$z_2$的有向Jordan曲线, 记$\Gamma$的一个分割为$\pi: z_1 = \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n+1} = z_2$, $\Delta = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n+1}|\lambda_{i+1}-\lambda_i|$, 若对$\lambda_i$到$\lambda_{i+1}$的曲线段上任意点$\lambda_i^*$, 极限

$$\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^n x(\lambda_i^*)(\lambda_{i+1}-\lambda_i)$$

都存在, 则称x沿曲线Γ可积. 上式的极限称为是x沿有向曲线Γ的积分, 记做$\int_\Gamma x(\lambda)\mathrm{d}\lambda$.

数值解析函数的许多性质在抽象函数的情况下仍然成立, 举例如下.

定理 1.3.4 抽象解析函数满足如下性质:

(1) (Cauchy定理) 设$x:\mathcal{D}\to X$是抽象解析函数, $\mathcal{D}$是$\mathbb{C}$中有界开区域, 其边界$\varGamma=\partial\mathcal{D}$是可求长封闭Jordan曲线, 如果$x$在$\overline{\mathcal{D}}$上强连续, 则$\int_{\varGamma}x(\lambda)\mathrm{d}\lambda=0$.

(2) (整函数定理) 设$x:\mathbb{C}\to X$是抽象解析函数, 并且x在$\mathbb{C}$上有界, 则$x(\lambda)\equiv 0,\lambda\in\mathbb{C}$.

(3) (Cauchy积分公式) 设$x:\mathcal{D}\to X$是抽象解析函数, 则x在$\mathcal{D}$中处处存在任意阶强导数, 并且

$$x^{(n)}(\lambda_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\varGamma}\frac{x(\lambda)}{(\lambda-\lambda_0)^{n+1}}\mathrm{d}\lambda,\quad\forall\lambda_0\in\mathcal{D},n=0,1,2,\cdots,$$

其中$\varGamma$是任意一个以λ_0为圆心而包含于$\mathcal{D}$内的圆周, 取逆时针方向.

1.3.2 算子半群基本概念

定义 1.3.7 设E是Banach空间, 算子值函数$S:\mathbb{R}^+=[0,+\infty)\to\mathcal{L}(E)$满足

(1) $S(0)=I$ (I是E上的恒等算子),

(2) $S(s)S(t)=S(t+s),\forall s,t\in\mathbb{R}^+$,

则称$S(t)(t\geqslant 0)$是空间E上有界线性算子半群, 简称算子半群或半群.

空间E上半群$S(t)$的无穷小生成元A是一个线性算子, 定义如下

$$Ax=\lim_{t\downarrow 0}\frac{S(t)x-x}{t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}S(t)x\Big|_{t=0},$$

其中$D(A)$是使上述极限存在的所有E中元素的集合, $t\downarrow 0$表示$t>0$并且$t\to 0$.

有界线性算子半群$S(t)$如果满足

$$\lim_{t\downarrow 0}\|S(t)-I\|=0,$$

则称$S(t)$为一致连续半群. 一致连续半群与其生成元有如下关系.

定理 1.3.5 线性算子A是一致连续半群的无穷小生成元的充分必要条件为A是有界线性算子. 若$A\in\mathcal{L}(E)$, 则A生成一致连续半群

$$S(t)=\mathrm{e}^{tA}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(tA)^n}{n!},t\in\mathbb{R}^+. \tag{1.3.1}$$

证明 设$A\in\mathcal{L}(E)$, 则式(1.3.1)的右端对任意的$t\geqslant 0$都是依范数收敛的且定义了一个有界线性算子$S(t)$. 显然$S(0)=I$和$S(t+s)=S(t)S(s)$成立. 通过对幂级数的估计, 可得

$$\|S(t)-I\|\leqslant t\|A\|\mathrm{e}^{t\|A\|},$$

和

$$\left\|\frac{S(t)-I}{t}-A\right\|\leqslant\|A\|\|S(t)-I\|,$$

由上两式可推出$S(t)$是E上有界线性算子一致连续半群且其无穷小生成元为A.

设$S(t)$是E上有界线性算子一致连续半群. 取充分小的常数$\rho>0$, 使得

$$\|I-\rho^{-1}\int_0^\rho S(s)\mathrm{d}s\|<1.$$

于是$\rho^{-1}\int_0^\rho S(s)\mathrm{d}s$是可逆的, 因此$\int_0^\rho S(s)\mathrm{d}s$也是可逆的. 由于

$$\begin{aligned}h^{-1}(S(h)-I)\int_0^\rho S(s)\mathrm{d}s &= h^{-1}\left(\int_0^\rho S(s+h)\mathrm{d}s-\int_0^\rho S(s)\mathrm{d}s\right)\\ &= h^{-1}\left(\int_\rho^{\rho+h} S(s)\mathrm{d}s-\int_0^h S(s)\mathrm{d}s\right),\end{aligned}$$

所以有

$$h^{-1}(S(h)-I)=\left(h^{-1}\int_\rho^{\rho+h} S(s)\mathrm{d}s-h^{-1}\int_0^h S(s)\mathrm{d}s\right)\left(\int_0^\rho S(s)\mathrm{d}s\right)^{-1}.$$

在上式中令$h\downarrow 0$, 得$h^{-1}(S(h)-I)$依范数收敛到有界线性算子$(S(\rho)-I)\left(\int_0^\rho S(s)\mathrm{d}s\right)^{-1}$. 即$S(t)$的无穷小生成元$(S(\rho)-I)\left(\int_0^\rho S(s)\mathrm{d}s\right)^{-1}$是有界线性算子. ¶

1.3.3 C_0半群

当半群$S(t)$作为算子值函数关于$t\in[0,+\infty)$强连续时, 则有如下定义:

定义 1.3.8 算子半群$S(t)$满足$\forall x\in E$, $S(t)x$在$t\in[0,\infty)$上是连续的, 即

$$\lim_{t\downarrow 0}S(t)x=x,\quad \forall x\in E,$$

则称$S(t)$是E上有界线性算子强连续半群, 简称为C_0半群.

C_0半群有如下基本性质.

定理 1.3.6 设$S(t)$是空间E上的C_0半群, 其无穷小生成元为A, 则

(1) 存在常数$\omega\geqslant 0, M\geqslant 1$, 使得对任意的$0\leqslant t<+\infty$, 成立

$$\|S(t)\|\leqslant M\mathrm{e}^{\omega t}.$$

(2) 对任意的$x\in E$, 成立

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}S(s)x\mathrm{d}s=S(t)x.$$

(3) 对任意的$x\in E$, 有$\int_0^t S(s)x\mathrm{d}s\in D(A)$并且成立

$$A\left(\int_0^t S(s)x\mathrm{d}s\right)=S(t)x-x.$$

(4) 对任意的$x\in D(A)$, 有$S(t)x\in D(A)$并且成立

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}S(t)x=AS(t)x=S(t)Ax.$$

(5) 对任意的$x\in D(A)$, 成立

$$S(t)x-S(s)x=\int_s^t S(\tau)Ax\mathrm{d}\tau=\int_s^t AS(\tau)x\mathrm{d}\tau.$$

(6) A是一个闭线性算子, 并且$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}D(A^n)$在$E$中稠密, 其中$D(A^n)$表示$A^n$的定义域.

(7) 设$T(t)$是有界线性算子半群, 其生成元也为A, 则$T(t)=S(t),\forall t\geqslant 0$.

证明 (1) 首先存在$\eta>0$, 使得当$0\leqslant t\leqslant\eta$时$S(t)$有界. 否则, 存在正数序列$\{t_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}t_n=0$和$\|S(t_n)\|\geqslant n$. 于是由Banach空间一致有界定理, 存在$x\in E$, 使得$\|S(t_n)x\|$是无界的, 这与$C_0$半群定义相矛盾. 因此当$0\leqslant t\leqslant\eta$时$S(t)$有界, 记为$M$. 由$S(0)=I$知$M\geqslant 1$. 令$\omega=\eta^{-1}\log M\geqslant 0$. 给定$t\geqslant 0$, 存在$n\in\mathbb{N},0\leqslant\delta<\eta$, 使得$t=n\eta+\delta$. 因而由半群性质

$$\|S(t)\|=\|S(\delta)S(\eta)^n\|\leqslant M^{n+1}\leqslant MM^{\frac{t}{\eta}}=M\mathrm{e}^{\omega t}.$$

(2) 由$S(t)x$关于$t\geqslant 0$的连续性直接推出.

(3) 令$x\in E,h>0$, 则有

$$\begin{aligned}\frac{S(h)-I}{h}\int_0^t S(s)x\mathrm{d}s &= \frac{1}{h}\int_0^t(S(s+h)x-S(s)x)\mathrm{d}s\\ &= \frac{1}{h}\int_t^{t+h}S(s)x\mathrm{d}s-\frac{1}{h}\int_0^h S(s)x\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

上式当$h\downarrow 0$时右端趋于$S(t)x-x$. 于是(3)得证.

(4) 令$x\in D(A),h>0$, 则有

$$\frac{S(h)-I}{h}S(t)x=S(t)\left(\frac{S(h)-I}{h}\right)x\to S(t)Ax,\ h\downarrow 0.$$

因此$S(t)x\in D(A),AS(t)x=S(t)Ax$, 即$S(t)x$的右导数是$S(t)Ax$. 下证当$t>0$时$S(t)x$的左导数是$S(t)Ax$. 事实上

$$\begin{aligned}&\lim_{h\downarrow 0}\left(\frac{S(t)x-S(t-h)x}{h}-S(t)Ax\right)\\ =\ &\lim_{h\downarrow 0}S(t-h)\left(\frac{S(h)x-x}{h}-Ax\right)+\lim_{h\downarrow 0}(S(t-h)Ax-S(t)Ax).\end{aligned}$$

因为$x\in D(A)$和$\|S(t-h)\|$在$0\leqslant h\leqslant t$上有界, 所以上式右端第一项为零, 由$S(t)$的强连续性, 第二项也为零. 于是(4)得证.

(5) 在(4)中等式两边从s到t积分直接可得.

(6) 这里只证$\overline{D(A)}=E$. 关于$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} D(A^n)$在$E$中稠密的证明可见参考文献[8]. 任取$x\in E$, 令$x_t=\frac{1}{t}\int_0^t S(s)\mathrm{d}s$. 由(3)知, 对$t>0$有$x_t\in D(A)$, 并且由(2)知, $\lim\limits_{t\downarrow 0} x_t=x$. 因此$\overline{D(A)}=E$. 为证$A$的闭性, 设$x_n\in D(A)$, $x_n\to x, Ax_n\to y$. 由(5)知,

$$S(t)x_n-x_n=\int_0^t S(s)Ax_n\mathrm{d}s.$$

在上式两边令$n\to\infty$, 得到

$$S(t)x-x=\int_0^t S(s)y\mathrm{d}y,$$

两边同除以t, 再令$t\downarrow 0$, 由(2)可得$x\in D(A), Ax=y$.

(7) 设$x\in D(A)$. 由(4)知函数$s\to T(t-s)S(s)x$是可微的, 并且

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}T(t-s)S(s)x &= -AT(t-s)S(s)x+T(t-s)AS(s)x\\ &= -T(t-s)AS(s)x+T(t-s)AS(s)x=0.\end{aligned}$$

因此$s\to T(t-s)S(s)x$是与s无关的常值, 分别令$s=0$和$s=t$, 即得$T(t)x=S(t)x$. 由(6)知, $D(A)$在E中稠密, 再由$T(t), S(t)$都是有界线性算子, 所以$T(t)x=S(t)x, \forall x\in E$. ¶

在定理1.3.6中, 如果$\omega=0, M=1$, 即对任意$t\in\mathbb{R}^+$, $\|S(t)\|\leqslant 1$, 则称$S(t)$是压缩半群.

设$A: D(A)\subset E\to E$是Banach空间E上的闭算子, 称范数

$$\|x\|_{D(A)}=\|x\|+\|Ax\|,\quad x\in D(A),$$

为$D(A)$上的图范数. 在第一节中已经给出了有界线性算子谱集的定义. 下设A是无界算子, 如果$\lambda I-A$是一对一的满射, 称复数λ属于A的预解集$\rho(A)$. 由闭图像定理1.1.6,

$$R(\lambda,A)=(\lambda I-A)^{-1}, \lambda\in\rho(A),$$

是E上有界线性算子, 称为A的预解算子. $\rho(A)$在复数域$\mathbb{C}$中的补集称为A谱集, 记做$\sigma(A)$.

对于一般的C_0半群, 有如下著名的Hille-Yosida定理, 其证明见文献[8].

定理 1.3.7 (Hille-Yosida定理) 设$A: D(A)\subset E\to E$是一个闭线性算子, 则如下两个条件等价.

(1) A是满足$\|S(t)\|\leqslant M\mathrm{e}^{\omega t}$的$C_0$半群的无穷小生成元.

(2) $D(A)$在E中稠密, 预解集$\rho(A)$包含射线$(\omega,+\infty)$, 并且成立

$$\|R(\lambda,A)^n\|\leqslant\frac{M}{(\lambda-\omega)^n},\quad n=1,2,\cdots. \tag{1.3.2}$$

进而如果(1)或(2)成立, 则有

$$R(\lambda,A)x=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}S(t)x\mathrm{d}t,\quad \forall x\in E, \lambda>\omega. \tag{1.3.3}$$

如果令定理1.3.7中的$M=1,\omega=0$, 得到压缩半群的Hille-Yosida定理.

推论 1.3.1 线性算子A是C_0压缩半群$S(t),t\geqslant 0$的无穷小生成元当且仅当

(1) A是闭算子, 且$D(A)$在E中稠密.

(2) A的预解集$\rho(A)$包含正实轴, 且有

$$\|R(\lambda,A)\|\leqslant\frac{1}{\lambda},\quad \forall\lambda>0.$$

定义对偶集$F(x)\subset E^*, x\in E$如下:

$$F(x)=\{x^*:x^*\in E^*, x^*(x)=\|x\|^2=\|x^*\|^2\}.$$

由Hahn-Banach定理可知, 对任意的$x\in E$, $F(x)\neq\emptyset$.

如果对于任意的$x\in D(A)$, 存在$x^*\in F(x)$, 使得$\mathrm{Re}(x^*(Ax))\leqslant 0$, 则称线性算子$A$是耗散的. 耗散算子的另一个等价定义为, 对任意的$x\in D(A),\lambda>0$, 成立$\|(\lambda I-A)x\|\geqslant\lambda\|x\|$.

C_0压缩半群的无穷小生成元与耗散算子有如下关系.

定理 1.3.8 (Lumer-Phillips定理) 设A是E中的稠定线性算子, 则

(1) 如果A是耗散的, 且存在$\lambda_0>0$, 使得$\lambda_0 I-A$的值域$R(\lambda_0 I-A)=E$, 则A是一个E上C_0压缩半群的无穷小生成元.

(2) 如果A是一个E上C_0压缩半群的无穷小生成元, 则A是耗散的, $R(\lambda I-A)=X,\forall\lambda>0$, 并且对任意的$x\in D(A), x^*\in F(x)$, 都有$\mathrm{Re}(x^*(Ax))\leqslant 0$.

假定A满足定理1.3.7的(1)或(2), 定义A的Yosida逼近如下,

$$A_\lambda=\lambda AR(\lambda,A)=\lambda^2R(\lambda,A)-\lambda I,\quad \lambda>\omega, \tag{1.3.4}$$

则A_λ是有界线性算子, 并且有下列逼近关系:

$$\begin{aligned}
&S(t)x=\lim_{\lambda\to\infty}\mathrm{e}^{tA_\lambda}x, && x\in E,\\
&\lim_{\lambda\to\infty}\lambda R(\lambda,A)x=x, && x\in E,\\
&\lim_{\lambda\to\infty}A_\lambda x=Ax, && x\in D(A).
\end{aligned} \tag{1.3.5}$$

式(1.3.5)给出了半群$S(t)$的一种逼近形式, 下面再给出两个类似的结果.

定理 1.3.9 设$S(t)$是一个C_0半群, 其无穷小生成元为A, 则

(1)
$$S(t)x=\lim_{h\downarrow 0}\mathrm{e}^{tA(h)}x,\quad x\in E,\ A(h)x=\frac{S(h)x-x}{h}. \tag{1.3.6}$$

(2)

$$S(t)x = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{t}R(\frac{n}{t},A)\right]^n x, \quad x \in E. \tag{1.3.7}$$

并且上两式极限在t的有界区间上是一致成立的.

证明 这里只给出(1)的证明, (2)的证明见文献[8]. 设$\|S(t)\| \leqslant M\mathrm{e}^{\omega t}, \omega \geqslant 0$, A是$S(t)$的无穷小生成元. 因为$A(h)$对任意固定的$h>0$都是有界的, 所以$\mathrm{e}^{tA(h)}$有意义且是一致连续半群. 由于$A(h)$和$S(t)$可交换, 所以$\mathrm{e}^{tA(h)}$和$S(t)$亦可交换. 又由于

$$\|\mathrm{e}^{tA(h)}\| \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{t}{h}}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{t}{h})^k\frac{\|S(hk)\|}{k!} \leqslant M\mathrm{e}^{\frac{t}{h}(\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\omega h}}-1)}.$$

因此对于$0<h<1$, 有

$$\|\mathrm{e}^{tA(h)}\| \leqslant M\mathrm{e}^{t(\mathrm{e}^{\omega}-1)}.$$

又对$x \in D(A)$, $\mathrm{e}^{(t-s)A(h)}S(s)x$关于$s$是可微的, 而且

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\mathrm{e}^{(t-s)A(h)}S(s)x) &= -S(h)\mathrm{e}^{(t-s)A(h)}S(s)x + \mathrm{e}^{(t-s)A(h)}AS(s)x \\ &= \mathrm{e}^{(t-s)A(h)}S(s)(Ax - A(h)x).\end{aligned}$$

所以对于$0<h\leqslant 1, x \in D(A)$, 有

$$\begin{aligned}\|S(t)x - \mathrm{e}^{tA(h)}x\| &= \left\|\int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\mathrm{e}^{(t-s)A(h)}S(s)x\mathrm{d}s)\right\| \\ &\leqslant \int_0^t \|\mathrm{e}^{(t-s)A(h)}\|\|S(s)\|\|Ax - A(h)x\|\mathrm{d}s \\ &\leqslant tM^2\mathrm{e}^{t(\mathrm{e}^{\omega}+\omega-1)}\|Ax - A(h)x\|.\end{aligned}$$

在上式中令$h \downarrow 0$即得所证等式对$x \in D(A)$成立. 因为$\|\mathrm{e}^{tA(h)}\|$和$\|S(t)\|$在t的有限区间上一致有界并且$D(A)$在E中稠密, 所以式(1.3.6)对任意的$x \in E$成立. ¶

下面通过讨论抽象发展方程初值问题来说明算子半群在偏微分方程中的应用.

考虑Banach空间E中的初值问题

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t), & t \in [0,T], \\ u(0) = x, & x \in E, \end{cases} \tag{1.3.8}$$

其中$u'(t)$表示$u(t)$的强导数, A是一个线性算子, $f \in L^1(0,T;E)$是可测的.

初值问题(1.3.8)解的存在唯一性由以下定理给出, 其证明可见参考文献[3].

定理 1.3.10 假定A是一个E中C_0半群$S(\cdot)$的生成元, $f \in L^1(0,T;E)$. 则方程(1.3.8)存在唯一弱解

$$u(t) = S(t)x + \int_0^t S(t-s)f(s)\mathrm{d}s, \ t \in [0,T]. \tag{1.3.9}$$

由式(1.3.9)定义的函数$u(\cdot)$称为是方程(1.3.8)的温和解.

1.3.4 解析半群与算子的分数次幂

为了研究Cauchy问题解的正则性, 下面介绍一类非常重要的半群, 即解析半群, 并给出闭算子分数次幂和插值空间基本概念和性质.

对任意的$\omega \in \mathbb{R}, \theta \in (0, \pi)$, 定义复平面$\mathbb{C}$上扇形

$$S_{\omega,\theta} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda - \omega)| \leqslant \theta\}.$$

假设 1.3.1 假定A为闭线性算子, 且满足以下条件:

(1) 存在$\omega \in \mathbb{R}, \theta_0 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 使得$\rho(A) \supset S_{\omega,\theta_0}$;

(2) 存在$M > 0$, 使得

$$\|R(\lambda, A)\| \leqslant \frac{M}{|\lambda - \omega|}, \quad \forall \lambda \in S_{\omega,\theta_0}. \tag{1.3.10}$$

可以定义E上有界线性算子半群$S(t)$,

$$S(0) = I; \quad S(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\varepsilon,\theta}} \mathrm{e}^{\lambda t} R(\lambda, A)\mathrm{d}\lambda, \ t > 0, \tag{1.3.11}$$

其中$\theta \in (\frac{\pi}{2}, \theta_0)$, $\gamma_{\varepsilon,\theta}$是复平面$\mathbb{C}$ 上逆时针路径

$$\gamma_{\varepsilon,\theta} = \gamma^+_{\varepsilon,\theta} \cup \gamma^-_{\varepsilon,\theta} \cup \gamma^0_{\varepsilon,\theta},$$

$$\gamma^{\pm}_{\varepsilon,\theta} = \{z \in \mathbb{C} : z = \omega + r\mathrm{e}^{\pm i\theta}, r \geqslant \varepsilon\},$$

$$\gamma^0_{\varepsilon,\theta} = \{z \in \mathbb{C} : z = \omega + \varepsilon \mathrm{e}^{i\eta}, |\eta| \leqslant \theta\}.$$

注意到由Cauchy定理, $S(t)$的定义不依赖于ε和θ的选取. 可以证明[3], 当$D(A)$在E中稠密时, $S(t)$是一个C_0半群. 若$D(A)$在E中不是稠密的, 这时$S(t)$不是C_0半群. 对于半群$S(t)$, 成立如下定理, 其证明可见参考文献[3, 8].

定理 1.3.11 假定A满足式(1.3.10), $S(\cdot)$由式(1.3.11)定义, 则成立

(1) 映射$S : (0, +\infty) \to \mathcal{L}(E), t \to S(t)$是解析的, 并且对任意的$x \in E, n = 1, 2, \cdots$, 有$S(t)x \in D(A^n)$, 并且$S^n(t)x = A^n S(t)x$.

(2) 对任意的$t, s \geqslant 0$, 有$S(t + s) = S(t)S(s)$.

(3) $S(\cdot)x$在0处连续, 当且仅当$x \in \overline{D(A)}$.

(4) 存在$M, N > 0$使得

$$\|S(t)\| \leqslant M\mathrm{e}^{\omega t}, t \geqslant 0; \quad \|AS(t)\| \leqslant \mathrm{e}^{\omega t}(\frac{N}{t} + \omega M), t > 0.$$

(5) $S(\cdot)$可延拓为$S_{0,\theta_0 - \frac{\pi}{2}}$上的解析$\mathcal{L}(E)$-值函数.

因性质(5), 所以称$S(t)$为解析半群.

因为用$\mathrm{e}^{\omega t}$乘以一个C_0半群并不影响它的解析性, 所以以下假定式(1.3.10)中的$\omega < 0$, 即半群$S(t)$是负型的. 对任意的$\alpha \in (0,1)$, 定义

$$(-A)^{-\alpha}x = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\varepsilon,\theta}} (-\lambda)^{-\alpha}R(\lambda,A)x\mathrm{d}\lambda, \quad t>0, x\in E. \tag{1.3.12}$$

则$(-A)^{-\alpha}$是一对一的, 因而其逆存在. 定义$-A$的分数次幂$(-A)^{\alpha}$为$(-A)^{-\alpha}$的逆, 记其定义域为$D((-A)^{\alpha})$, 则有

$$(-A)^{\alpha}(-A)^{\beta} = (-A)^{\alpha+\beta}, \quad \forall \alpha,\beta\in(0,1), \alpha+\beta \leqslant 1. \tag{1.3.13}$$

由式(1.3.11), 可以得到$(-A)^{\alpha}S(\cdot)$的如下表示形式, 这在抽象Cauchy问题解的正则性分析中起着重要的作用, 其证明可见文献[3].

定理 1.3.12 假定A是一个线性算子, 满足假设1.3.1并且$\omega<0$, 则对任意的$\alpha\in(0,1)$, $t>0$, 有$S(t)x\in D((-A)^{\alpha}), \forall x\in E$, 并且

$$(-A)^{\alpha}S(t)x = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\varepsilon,\theta}} \mathrm{e}^{\lambda t}(-\lambda)^{\alpha}R(\lambda,A)x\mathrm{d}\lambda. \tag{1.3.14}$$

对任意的$\varepsilon>0$, 存在常数$N_{\alpha,\varepsilon}>0$, 使得

$$\|(-A)^{\alpha}S(t)\| \leqslant \frac{N_{\alpha,\varepsilon}}{t^{\alpha}}\mathrm{e}^{(\omega+\varepsilon)t}, \quad t>0. \tag{1.3.15}$$

对任意的$x\in D((-A)^{\alpha})$, 存在常数C_{α}, 使得

$$\|S(t)x-x\| \leqslant C_{\alpha}t^{\alpha}\|(-A)^{\alpha}x\|. \tag{1.3.16}$$

插值空间理论中另外两个重要的空间是$D_A(\alpha,\infty), \alpha\in(0,1)$和$D_A(\alpha,2), \alpha\in(0,1)$.

对任意的$\alpha\in(0,1)$, 定义

$$\|x\|_{\alpha,\infty} = \sup_{t>0}\frac{\|S(t)x-x\|}{t^{\alpha}}, \quad x\in E.$$

则空间

$$D_A(\alpha,\infty) = \{x\in E : \|x\|_{\alpha,\infty} < +\infty\}$$

在范数$\|\cdot\|+\|\cdot\|_{\alpha,\infty}$下, 构成一个Banach 空间. 进一步可以定义

$$D_A(\alpha+1,\infty) = \{x\in D(A) : Ax\in D_A(\alpha,\infty)\}.$$

假定E是一个Hilbert空间, 则$D_A(\alpha,2), \alpha\in(0,1)$由下式定义:

$$D_A(\alpha,2) = \{x\in E : \|x\|_{\alpha}^2 = \int_0^{\infty}\xi^{1-2\alpha}\|AS(\xi)x\|^2\mathrm{d}\xi < \infty\}, \alpha\in(0,\frac{1}{2}), \tag{1.3.17}$$

$$D_A(\alpha,2) = \{x\in E : \|x\|_{\alpha}^2 = \int_0^{\infty}\xi^{3-2\alpha}\|A^2S(\xi)x\|^2\mathrm{d}\xi < \infty\}, \alpha\in(\frac{1}{2},1). \tag{1.3.18}$$

由$D_A(\alpha,2),\alpha\in(0,1)$的定义, $S(\cdot)$限制在$D_A(\alpha,2)$ 上是一个压缩半群, 事实上有

$$\|S(t)x\|_\alpha^2=\int_t^\infty(\eta-t)^{1-2\alpha}\|AS(\eta)x\|^2\mathrm{d}\eta\leqslant\|x\|_\alpha^2,\alpha\in(0,\frac{1}{2}),\tag{1.3.19}$$

$$\|S(t)x\|_\alpha^2=\int_t^\infty(\eta-t)^{3-2\alpha}\|A^2S(\eta)x\|^2\mathrm{d}\eta\leqslant\|x\|_\alpha^2,\alpha\in(\frac{1}{2},1).\tag{1.3.20}$$

以上所介绍的插值空间之间有如下的包含关系.

定理 1.3.13 假定A是一个线性算子, 满足假设1.3.1并且$\omega<0$, 则对任意的$\alpha\in(0,1)$, 成立

(1) $D((-A)^\alpha)\subset D_A(\alpha,\infty)$.

(2) $D_A(\alpha,\infty)\subset D((-A)^{\alpha-\varepsilon}),\forall 0<\varepsilon<\alpha$.

(3) 进一步假设E是Hilbert空间, 则$D((-A)^\alpha)\subset D_A(\alpha-\varepsilon,2),\varepsilon\in(0,\alpha)$.

证明 令$x\in D((-A)^\alpha)$, 则由定理1.3.12, 存在常数$C>0$, 使得

$$\|AS(t)x\|=\|(-A)^{1-\alpha}S(t)(-A)^\alpha x\|\leqslant Ct^{\alpha-1}\|(-A)^\alpha\|.$$

因此$\|t^{1-\alpha}AS(t)x\|$是有界的并且$x\in D_A(\alpha,\infty)$.

假定$x\in D_A(\alpha,\infty)$, 则由定理1.3.7, 存在常数$C_1(x)$, 使得

$$\|\lambda^\alpha AR(\lambda,A)x\|\leqslant C_1(x),\quad\lambda>0.$$

因此令$\varepsilon\in(0,\alpha)$, 则$x\in D((-A)^{\alpha-\varepsilon})$并且

$$(-A)^{\alpha-\varepsilon}x=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\varepsilon,\theta}}\lambda^{\alpha-\varepsilon-1}AR(\lambda,A)x\mathrm{d}\lambda.$$

设$x\in D((-A)^\alpha)$. 由定理1.3.12, 存在常数$C>0,\delta>0$, 使得

$$\|(-A)^{1-\alpha}S(t)\|\leqslant\frac{C\mathrm{e}^{-\delta t}}{t^{1-\alpha}}.$$

因此

$$\|AS(t)x\|=\|(-A)^{1-\alpha}S(t)(-A)^\alpha x\|\leqslant\frac{C\mathrm{e}^{-\delta t}}{t^{1-\alpha}}\|(-A)^\alpha x\|.$$

又由于

$$\int_0^\infty\xi^{1-2\alpha+2\varepsilon}\|AS(\xi)x\|^2\mathrm{d}\xi\leqslant C^2\|(-A)^\alpha x\|^2\int_0^\infty\xi^{2\varepsilon-1}\mathrm{e}^{-\delta\xi}\mathrm{d}\xi<+\infty,$$

因此包含关系得证. ¶

1.3.5 半群的扰动和逼近

这一小节简单介绍半群的扰动和逼近. 设A是Banach空间E上C_0半群$S(t)$的无穷小生成元, 满足关系$\|S(t)\|\leqslant M\mathrm{e}^{\omega t}$. 如果$B$是一个有界线性算子, 则不难证明$A+B$是$E$上$C_0$半群$T(t)$的无穷小生成元, 满足$\|T(t)\leqslant M\mathrm{e}^{(\omega+M\|B\|)t}$, 并且成立

$$\|S(t)-T(t)\|\leqslant M\mathrm{e}^{\omega t}(\mathrm{e}^{M\|B\|t}-1).$$

若不要求B是有界的, 则有如下结论成立.

定理 1.3.14 设A是一个解析半群的无穷小生成元, B是一个闭线性算子, 满足

$$D(B) \supset D(A), \quad \|Bx\| \leqslant a\|Ax\| + b\|x\|, \quad x \in D(A). \tag{1.3.21}$$

则当存在正常数δ使得$0 \leqslant a \leqslant \delta$时, $A+B$是一个解析半群的无穷小生成元. 进一步如果B是一个闭线性算子, 存在$\alpha \in (0,1)$, 使得$D(B) \supset D((-A)^\alpha)$, 则$A+B$是一个解析半群的无穷小生成元.

证明 首先假设由A生成的半群$S(t)$是一致有界的. 则存在$\omega > 0$, $\rho(A) \supset \sum = \{\lambda : |\arg\lambda| \leqslant \omega + \frac{\pi}{2}\}$, 并且在$\sum$中, $R(\lambda, A)\| \leqslant M|\lambda|^{-1}$. 考虑有界线性算子$BR(\lambda, A)$, 由条件, 对一切$x \in E$,

$$\begin{aligned}\|BR(\lambda, A)x\| &\leqslant a\|AR(\lambda, A)x\| + b\|R(\lambda, A)x\| \\ &\leqslant a(M+1)\|x\| + \frac{bM}{|\lambda|}\|x\|.\end{aligned}$$

令$\delta = \frac{1}{2}(1+M)^{-1}, |\lambda| > 2bM$, 则$\|BR(\lambda, A)\| \leqslant 1$, 因此$I - BR(\lambda, A)$是可逆的, 并且

$$(\lambda I - (A+B))^{-1} = R(\lambda, A)(1 - BR(\lambda, A))^{-1}.$$

因此对$|\lambda| > 2bM, |\arg\lambda| \leqslant \omega + \frac{\pi}{2}$, 有

$$\|R(\lambda, A+B)\| \leqslant M'|\lambda|^{-1}.$$

由此推出$A+B$是一个解析半群的无穷小生成元.

如果$S(t)$不是一致有界的, 设$\|S(t)\| \leqslant M\mathrm{e}^{\omega t}$. 考虑由$A_0 = A - \omega I$生成的半群$\mathrm{e}^{-\omega t}S(t)$. 则由已知条件, 有

$$\|Bx\| \leqslant a\|A_0 x\| + (a\omega + b)\|x\|, \quad \forall x \in D(A).$$

因此由证明的第一部分, 如果$0 < a < \delta$, 则$A_0 + B = A + B - \omega I$是一个解析半群的无穷小生成元. 由此可得$A+B$也是一个解析半群的无穷小生成元.

若B是一个闭线性算子, 存在$\alpha \in (0,1)$, 使得$D(B) \supset D((-A)^\alpha)$, 则存在常数$C > 0$, 对一切$x \in D((-A)^\alpha)$, 成立$\|Bx\| \leqslant C\|(-A)^\alpha x\|$, 并且存在常数$C_1$使得对一切$\rho > 0, x \in D(A)$, 成立

$$\|Bx\| \leqslant C_1(\rho^\alpha\|x\| + \rho^{\alpha-1}\|Ax\|).$$

由于可以选取ρ充分大, 使得$C_1\rho^{\alpha-1} < \delta$, 于是结论成立. ¶

用$A \in G(M, \omega)$表示A是一个满足$\|S(t)\| \leqslant M\mathrm{e}^{\omega t}$的$C_0$半群$S(t)$的无穷小生成元, 则有如下著名的Trotter逼近定理成立, 其证明可见文献[8].

定理 1.3.15 设$A_n \in G(M, \omega)$, T_n是A_n生成的半群. $R(\lambda)x = \lim\limits_{n\to\infty} R(\lambda, A_n)x, x \in E$. 如果对某一$\mathrm{Re}\lambda_0 > \omega$的$\lambda_0$, 有

(1) 对任意的$x \in E$, $\lim\limits_{n\to\infty} R(\lambda_0, A_n) = R(\lambda_0)x$.

(2) $R(\lambda_0)$的值域在E中稠密.

则存在唯一的算子$A \in G(M, \omega)$使得$R(\lambda_0) = R(\lambda_0, A)$. 记$A$生成的半群为$T(t)$, 则对任意的$t \geqslant 0, x \in E$, 成立$\lim\limits_{n\to\infty} T_n(t)x = T(t)x$, 并且极限在有限区间上关于$t$是一致的.

1.4 有限元方法基本理论

本节介绍后续章节需要用到的有限元方法的基本理论, 主要涉及变分原理、插值误差估计和抛物问题的有限元方法等.

1.4.1 变分原理

设$(V, \|\cdot\|)$是一个Banach空间, V^*是V的对偶空间, 对偶积记做$\langle\cdot,\cdot\rangle$, $l \in V^*$是V上的连续线性泛函, $a(\cdot,\cdot): V \times V \to \mathbb{R}$是$V$上的双线性型, 即对于任意的$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} a(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) = \alpha_1 a(u_1, v) + \alpha_2 a(u_2, v), \quad \forall u_1, u_2, v \in V, \\ a(u, \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2) = \beta_1 a(u, v_1) + \beta_2 a(u, v_2), \quad \forall u, v_1, v_2 \in V. \end{cases} \tag{1.4.1}$$

如果存在正常数$M > 0$, 使得

$$|a(u, v)| \leqslant M\|u\| \cdot \|v\|, \ \forall u, v \in V, \tag{1.4.2}$$

则称双线性型$a(\cdot,\cdot)$是连续的. 如果存在正常数$\alpha > 0$, 使得

$$a(v, v) \geqslant \alpha\|v\|^2, \ \forall v \in V, \tag{1.4.3}$$

则称双线性型$a(\cdot,\cdot)$是V椭圆的.

定理 1.4.1 *假定V是一个Banach空间, $K \subset V$是V的非空闭凸子集, 双线性型$a(\cdot,\cdot)$连续、对称并且是V椭圆的, 则泛函极小问题: 求$u \in K$, 使得*

$$\begin{cases} J(v) := \frac{1}{2}a(v, v) - \langle l, v\rangle, \quad \forall v \in V, \\ J(u) \leqslant J(v), \quad \forall v \in K, \end{cases} \tag{1.4.4}$$

存在唯一解.

证明 由双线性型$a(\cdot,\cdot)$的对称性可知, $a(\cdot,\cdot)$定义了空间V上的一种内积. 又因为$a(\cdot,\cdot)$是连续且V椭圆的, 于是内积$a(\cdot,\cdot)$的诱导范数$|||v||| = \sqrt{a(v,v)}$与原范数$\|v\|$等价, 即

$$\sqrt{\alpha}\|v\| \leqslant |||v||| \leqslant \sqrt{M}\|v\|, \forall v \in V.$$

由等价范数定理和V在范数$\|\cdot\|$下的完备性可得, V在范数$|||\cdot|||$下是完备的, 从而V在内积$a(\cdot,\cdot)$下是一个Hilbert空间. 由Riesz表示定理1.1.5, 存在Riesz映射$\sigma: V^* \to V$, 使得

$$\langle l, v\rangle = a(\sigma l, v), \ \forall l \in V^*, v \in V.$$

根据$a(\cdot,\cdot)$的对称性,

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - \langle l, v\rangle = \frac{1}{2}a(v, v) - a(\sigma l, v)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}a(v-\sigma l, v-\sigma l) - \frac{1}{2}a(\sigma l, \sigma l) \\ &= \frac{1}{2}|||v-\sigma l|||^2 - \frac{1}{2}|||\sigma l|||^2. \end{aligned}$$

因此式(1.4.4)即为求V中元素σl到非空闭凸子集K的最小距离问题, 由泛函分析中的投影定理1.1.4即可得到问题解的存在性.

下证问题解的唯一性. 设$u_1, u_2 \in K$均为式(1.4.4)的解, 由于K是凸集, 得

$$\omega_t = tu_2 + (1-t)u_1 \in K, \forall t \in [0,1].$$

并且有

$$\begin{aligned} J(u_1) &\leqslant J(\omega_t) = J(u_1 + t(u_2-u_1)) \\ &= J(u_1) + t(a(u_1, u_2-u_1) - \langle l, u_2-u_1 \rangle) + \frac{t^2}{2}a(u_2-u_1, u_2-u_1). \end{aligned}$$

由此可得, 对任意的$t \in (0,1)$,

$$t(a(u_1, u_2-u_1) - \langle l, u_2-u_1 \rangle) + \frac{t^2}{2}a(u_2-u_1, u_2-u_1) \geqslant 0.$$

在上式两端同除以t, 然后令$t \downarrow 0$, 得

$$a(u_1, u_2-u_1) \geqslant \langle l, u_2-u_1 \rangle.$$

同理可得

$$a(u_2, u_1-u_2) \geqslant \langle l, u_1-u_2 \rangle.$$

上两式相加, 得

$$a(u_1-u_2, u_1-u_2) \leqslant 0.$$

由因为$a(\cdot,\cdot)$是V椭圆的, 于是$\|u_1-u_2\| = 0$, 即$u_1 = u_2$. ¶

下述定理表明泛函极小问题(1.4.4)等价于变分问题: 求$u \in K$, 使得

$$a(u, v-u) \geqslant \langle l, v-u \rangle, \ \forall v \in K. \tag{1.4.5}$$

定理 1.4.2 *在定理1.4.1的假设下, u是泛函极小问题(1.4.4)的解, 当且仅当u是式(1.4.5)的解.*

证明 设u是泛函极小问题(1.4.4)的解, 由于K是凸集, 对任意的$v \in K, t \in (0,1)$, $tv + (1-t)u \in K$, 并且有

$$\begin{aligned} J(u) &\leqslant J(tv + (1-t)u) = J(u + t(v-u)) \\ &= J(u) + t(a(u, v-u) - \langle l, v-u \rangle) + \frac{t^2}{2}a(v-u, v-u). \end{aligned}$$

由此可得, 对任意的$t \in (0,1)$,

$$t(a(u, v-u) - \langle l, v-u \rangle) + \frac{t^2}{2}a(v-u, v-u) \geqslant 0.$$

在上式两端同除以t, 然后令$t \downarrow 0$, 得

$$a(u, v-u) \geqslant \langle l, v-u\rangle, \forall v \in K,$$

即u是变分问题(1.4.5)的解.

反之, 设u是变分问题(1.4.5)的解, 则对任意的$v \in K$,

$$\begin{aligned} J(v) &= J(u+(v-u)) \\ &= J(u)+(a(u, v-u)-\langle l, v-u\rangle)+\frac{1}{2} a(v-u, v-u) \\ &\geqslant J(u), \end{aligned}$$

即u是泛函极小问题(1.4.4)的解. ¶

若K是V的闭子空间, 在变分问题(1.4.5)中分别取$v=u+\omega, v=u-\omega$, 则式(1.4.5)有如下形式: 求$u \in K$, 使得

$$a(u, v)=\langle l, v\rangle,\ \forall v \in K. \tag{1.4.6}$$

当双线性型$a(\cdot, \cdot)$非对称时, 泛函极小问题(1.4.4)与变分问题(1.4.5)不再等价, 但变分问题(1.4.5)仍然存在唯一解, 此即著名的Lax-Milgram定理.

定理 1.4.3 设V是Banach空间, $a(\cdot, \cdot)$是连续的、V椭圆的双线性型, $l \in V^*$, K是V的非空闭凸子集, 则变分问题(1.4.5)存在唯一解.

证明 构造双线性型

$$\begin{aligned} a_0(u, v) &= \frac{1}{2}(a(u, v)+a(v, u)), \\ \beta(u, v) &= \frac{1}{2}(a(u, v)-a(v, u)), \end{aligned}$$

则$a_0(\cdot, \cdot)$是连续、V椭圆的对称双线性型, $\beta(\cdot, \cdot)$是连续的反对称双线性型, 并且$a(u, v)=a_0(u, v)+\beta(u, v)$. 对任意的$t \in[0,1]$, 令

$$a_t(u, v)=a_0(u, v)+t \beta(u, v),$$

则$a_t(\cdot, \cdot)$是连续、V椭圆的双线性型. 考虑变分问题: 求$u \in K$, 使得

$$a_t(u, v-u) \geqslant\langle l, v-u\rangle,\ \forall v \in K,$$

即

$$a_0(u, v-u) \geqslant\langle l, v-u\rangle-t \beta(u, v-u),\ \forall v \in K. \tag{1.4.7}$$

由于$a_0(\cdot, \cdot)$是对称的, 因此当$t=0$时, 式(1.4.7)存在唯一解. 对任意给定的$\omega \in V$, 考虑变分问题: 求$u \in K$, 使得

$$a_0(u, v-u) \geqslant\langle l, v-u\rangle-t \beta(\omega, v-u), \forall v \in K. \tag{1.4.8}$$

由定理1.4.1, 式(1.4.8)存在唯一解$u=S_0\omega$. 令$u_i=S_0\omega_i, i=1,2$, 则

$$
\begin{aligned}
a_0(u_1,u_2-u_1)&\geqslant\langle l,u_2-u_1\rangle-t\beta(\omega_1,u_2-u_1),\\
a_0(u_2,u_1-u_2)&\geqslant\langle l,u_1-u_2\rangle-t\beta(\omega_2,u_1-u_2).
\end{aligned}
$$

两式相加, 得

$$
a_0(u_1-u_2,u_1-u_2)\leqslant -t\beta(\omega_1-\omega_2,u_1-u_2),
$$

再根据$a_0(\cdot,\cdot)$的V椭圆性和$\beta(\cdot,\cdot)$的连续性, 得

$$
\alpha\|u_1-u_2\|_V^2\leqslant tM\|\omega_1-\omega_2\|_V\|u_1-u_2\|_V,
$$

即

$$
\|S_0\omega_1-S_0\omega_2\|_V\leqslant\frac{tM}{\alpha}\|\omega_1-\omega_2\|_V.
$$

上式意味着当$0\leqslant t\leqslant t_0, t_0<\frac{\alpha}{M}$时, S_0是压缩算子. 由Banach空间中压缩算子不动点定理1.1.2, S_0在V中存在唯一的不动点$u=S_0u$, 此即式(1.4.7)当$0\leqslant t\leqslant t_0$的解.

当$t_0\leqslant t\leqslant 2t_0$时, 考虑变分问题: 求$u\in K$, 使得

$$
a_{t_0}(u,v-u)\geqslant\langle l,v-u\rangle-(t-t_0)\beta(\omega,v-u),\forall v\in K.
$$

由定理1.4.1, 上式存在唯一解, 记为$u=S_1\omega$. 同理可证

$$
\|S_1\omega_1-S_1\omega_2\|_V\leqslant\frac{(t-t_0)M}{\alpha}\|\omega_1-\omega_2\|_V.
$$

即当$t_0\leqslant t\leqslant 2t_0, t_0<\frac{\alpha}{M}$时, S_1是压缩算子, 从而S_1在V中存在唯一的不动点$u=S_1u$, 此即式(1.4.7)当$t_0\leqslant t\leqslant 2t_0$的解. 继续这一过程可得, 当$2t_0\leqslant t\leqslant 3t_0, 3t_0\leqslant t\leqslant 4t_0,\cdots$, 式(1.4.7)均存在唯一解. 由于$[0,1]$是有限区间, $t_0<\frac{\alpha}{M}$是一个固定的正常数, 因此有限步后即可证明, 式(1.4.7)当$0\leqslant t\leqslant 1$时存在唯一解. 在式(1.4.7)中令$t=1$, 即得定理证明. ¶

例 1.4.1 考虑齐次Dirichlet问题

$$
\begin{cases}
-\Delta u(x)+b(x)u(x)=f(x), & x\in\Omega,\\
u(x)=0, & x\in\partial\Omega,
\end{cases}
\tag{1.4.9}
$$

其中$\Omega\subset\mathbb{R}^n$是一个有界区域, $b\in L^\infty(\Omega), b\geqslant 0, f\in L^2(\Omega)$.

下面推导与式(1.4.9)对应的变分问题. 任取$v\in H_0^1(\Omega)$, 由Green积分公式(1.2.17),

$$
\int_\Omega \mathrm{grad}u\cdot\mathrm{grad}v\mathrm{d}x+\int_\Omega buv\mathrm{d}x=\int_\Omega fv\mathrm{d}x.
$$

定义空间$H_0^1(\Omega)$上的双线性型

$$
a(u,v)=\int_\Omega \mathrm{grad}u\cdot\mathrm{grad}v\mathrm{d}x+\int_\Omega buv\mathrm{d}x.
\tag{1.4.10}
$$

则若u是原问题(1.4.9)的解, u必满足如下变分问题: 求$u\in H_0^1(\Omega)$, 使得

$$a(u,v)=\int_\Omega fv\mathrm{d}x,\forall v\in H_0^1(\Omega).\tag{1.4.11}$$

另一方面, 如果u是变分问题(1.4.11)的解, 利用Green公式(1.2.17)得,

$$\int_\Omega(-\Delta u+bu-f)v\mathrm{d}x=0,\forall v\in H_0^1(\Omega),$$

由于$C^\infty(\Omega)$在$H_0^1(\Omega)$中稠密, 从而在$(C^\infty(\Omega))^*$中成立$-\Delta u+bu=f$, 这说明在分布意义下, 式(1.4.9)是成立的. 综上所述, 从广义解的意义上, 微分方程边值问题(1.4.9)与变分问题(1.4.11)是等价的. 由Poincaré不等式,

$$a(v,v)\geqslant\int_\Omega|\mathrm{grad}v|^2\mathrm{d}x=|v|_{1,\Omega}^2\geqslant C\|v\|_{1,\Omega}^2,\forall v\in H_0^1(\Omega),$$

又有

$$\begin{aligned}|a(u,v)|&\leqslant\int_\Omega|\mathrm{grad}u|\cdot|\mathrm{grad}v|\mathrm{d}x+\int_\Omega|buv|\mathrm{d}x\\&\leqslant|u|_{1,\Omega}\cdot|v|_{1,\Omega}+\|b\|_{0,\infty,\Omega}\|u\|_{0,\Omega}\cdot\|v\|_{0,\Omega}\\&\leqslant\max(1,\|b\|_{0,\infty,\Omega})\|u\|_{1,\Omega}\cdot\|v\|_{1,\Omega},\end{aligned}$$

因此, $a(\cdot,\cdot)$是连续、对称、$H_0^1(\Omega)$椭圆的双线性型. 由定理1.4.1可得, 变分问题(1.4.11)存在唯一解.

1.4.2 有限元离散与插值误差估计

这一小节介绍有限元离散与插值误差估计的基本知识, 下面的讨论仅限于凸多边形区域的插值误差估计, 对于曲边区域的情况, 读者可参考有限元方面的专著[5, 6].

设V是无穷维的Banach空间, $l\in V^*$, $a(\cdot,\cdot)$是双线性型, 满足Lax-Milgram定理1.4.3的条件, 则抽象变分问题: 求$u\in V$, 使得

$$a(u,v)=\langle l,v\rangle,\forall v\in V,\tag{1.4.12}$$

存在唯一解. 抽象变分问题(1.4.12)的有限维逼近是, 构造有限维子空间$V_h\subset V$, 求$u_h\in V_h$, 使得

$$a(u_h,v_h)=\langle l,v_h\rangle,\forall v_h\in V_h.\tag{1.4.13}$$

有限维离散问题(1.4.13)解的存在唯一性同样可由Lax-Milgram定理得到. 设$\{\omega_k\}_{k=1}^M$为V_h的一组基, 则式(1.4.13)等价于求$u_h\in V_h$, 使得

$$a(u_h,\omega_s)=\langle l,\omega_s\rangle,1\leqslant s\leqslant M.\tag{1.4.14}$$

令

$$u_h(x)=\sum_{t=1}^M u_t\omega_t(x),$$

则问题(1.4.14)等价于解线性代数方程组

$$\sum_{t=1}^{M} a(\omega_t, \omega_s) u_t = \langle l, \omega_s \rangle, s = 1, 2, \cdots, M. \tag{1.4.15}$$

其系数矩阵称为刚度矩阵

$$A = [a(\omega_t, \omega_s)]_{1 \leqslant t, s \leqslant M}. \tag{1.4.16}$$

对于二阶问题$V: H_0^1(\Omega) \subset V \subset H^1(\Omega)$, 而对于四阶问题$V: H_0^2(\Omega) \subset V \subset H^2(\Omega)$. 如前所述, 为保证离散问题(1.4.13)解的存在唯一性, 要求$V_h \in V$, 这种方法称为协调有限元方法, 反之则称为非协调有限元方法. 有限维离散空间V_h的构造应遵循以下几个方面的特征.

(1) 三角形剖分: 将区域$\overline{\Omega}$ 剖分成有限个子区域, 记T为其任一子区域, 称为单元, 单元全体记为$\mathcal{J}_h$, 满足如下约定条件.

　　($\mathcal{J}_h$1) 每个单元$T \in \mathcal{J}_h$都是闭集, 其内部T°非空连通.

　　($\mathcal{J}_h$2) 每个单元T的边界∂T都是Lipschitz连续的.

　　($\mathcal{J}_h$3) $\overline{\Omega} = \bigcup\limits_{T \in \mathcal{J}_h} T$.

　　($\mathcal{J}_h$4) 任意两个单元的内部不相交, 即$T_1, T_2 \in \mathcal{J}_h, T_1 \neq T_2 \Rightarrow T_1^\circ \cap T_2^\circ = \emptyset$.

　　($\mathcal{J}_h$5) 对每个$T \in \mathcal{J}_h$, ∂T是相邻单元T'的边或者是$\partial\Omega$的一部分.

(2) 分片多项式: 对于任意的$T \in \mathcal{J}_h$, 令P_T表示定义在T上的某种多项式的全体, 并且应满足当$h \downarrow 0$时, 离散问题有限元解在某种意义下收敛到原问题的解.

(3) 有限元空间V_h: 有限元空间V_h定义如下,

$$\begin{aligned} X_h &= \{v_h : v_h|_T \in P_T, \forall T \in \mathcal{J}_h\}, \\ V_h &= \{v_h \in X_h : \text{满足某种边界条件}\}. \end{aligned}$$

设$\mathcal{J}_h$是多边形区域Ω的一个剖分, $T \in \mathcal{J}_h$是单元. 考虑二阶问题, 此时$V \subset H^1(\Omega)$, 定义在$\overline{\Omega}$上的分片多项式函数$v \in H^1(\Omega)$, 当且仅当$v \in C^0(\Omega)$. 而对于四阶问题, 此时$V \subset H^2(\Omega)$, 定义在$\overline{\Omega}$上的分片多项式函数$v \in H^2(\Omega)$, 当且仅当$v \in C^1(\Omega)$.

对于平面区域上三角形剖分情况下分片多项式的构造, 经常用到的有Courant三角形元, Hermite元, 三次Lagrange三角形元和Zienkiewicz元, 这些元都是C^0元, 因此对二阶问题而言是协调的. 对于四阶问题而言, 比较著名的有Argyris三角形元, Bell三角形元和Hsich-Clough-Tocher三角形元, 这些元都是C^1的, 因而对四阶问题是协调的. 以上这些分片多项式的构造可参考有限元方面的专著[5, 6], 这里不再详细介绍.

设$\mathcal{J}_h$是多边形区域的一个剖分, $T \in \mathcal{J}_h$是单元, $h = \max\limits_{T \in \mathcal{J}_h} h_T, h_T = \mathrm{diam} T$, P是定义在T上给定类型, 给定次数的多项式空间, Σ是唯一地确定T上插值多项式$p \in P$的插值数据, 则有限元空间X_h由三元组(T, P, Σ)完全确定.

定义 1.4.1 称$\sqcap$是P插值算子, 如果对于T上充分光滑的函数v, $\sqcap v \in P$由插值数据Σ唯一确定. 特别地, 若$p \in P$, 则$\sqcap p = p$.

称两个有限元$(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$和$(T, P, \Sigma)$是仿射等价的, 如果存在一个可逆仿射变换

$$F : \hat{T} \to T, \quad F(\hat{x}) = B\hat{x} + b = x \in T, \forall \hat{x} \in \hat{T},$$

并且满足

$$\begin{cases} T = F(\hat{T}), \\ P = \{p : T \to \mathbb{R} | p = \hat{p} \circ F^{-1}\}, \\ A_i^r = F(\hat{A}_i^r), r = 0, 1, 2, \\ \xi_{ik}^1 = B\hat{\xi}_{ik}^1, \xi_{ik}^2 = B\hat{\xi}_{ik}^2, \end{cases}$$

其中$A_i^r, \xi_{ik}, \hat{A}_i^r, \hat{\xi}_{ik}$分别表示$\Sigma$和$\hat{\Sigma}$的插值数据. 对于仿射等价的有限元$(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$和$(T, P, \Sigma)$, $F : \hat{T} \to T$, 其插值算子保持以下性质:

(1) 如果$\{\hat{p}_i\}$是$\hat{P}$的基函数, 则$\{p_i\} = \{\hat{p}_i \circ F^{-1}\}$是$P$的基函数.

(2) P插值算子$\sqcap$与$\hat{P}$插值算子$\hat{\sqcap}$有关系$(\sqcap v)^\wedge \doteq \sqcap v \circ F^{-1} = \hat{\sqcap}\hat{v}$.

如果每个有限元(T, P, Σ)均与某一取定的标准有限元$(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$仿射等价, 则称$\{(T, P, \Sigma)\}_{T \in \mathcal{J}_h}$为仿射等价的有限元族.

设$\mathcal{T}_h, h > 0$是区域Ω的一个剖分族, $h = \max\limits_{T \in \mathcal{T}_h} (\mathrm{diam} T)$. 下面考虑原问题(1.4.12)与有限维离散问题(1.4.13)之间的误差$\|u - u_h\|$.

定理 1.4.4 (Cèa引理) 设双线性型$a(\cdot, \cdot)$是连续且V椭圆的, 则存在正常数$C > 0$, 使得

$$\|u - u_h\|_V \leqslant C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V, \tag{1.4.17}$$

其中u, u_h分别为原问题(1.4.12)与有限维离散问题(1.4.13)的解.

证明 由假定$V_h \in V$, 可以得到

$$a(u - u_h, v_h) = 0, \forall v \in V_h.$$

又由于$a(\cdot, \cdot)$是连续且V椭圆的, 所以存在正常数$M, \alpha > 0$, 使得$\forall v_h \in V_h$,

$$\begin{aligned} \alpha \|u - u_h\|_V^2 &\leqslant a(u - u_h, u - u_h) \\ &= a(u - u_h, u - v_h) + a(u - u_h, v_h - u_h) \\ &= a(u - u_h, u - v_h) \leqslant M \|u - u_h\|_V \|u - v_h\|_V. \end{aligned}$$

因此

$$\|u - u_h\|_V \leqslant \frac{M}{\alpha} \|u - v_h\|_V, \forall v_h \in V_h.$$

对上式右端关于$v_h \in V_h$求下确界, 即得定理证明. ¶

设$\sqcap_h : V \to V_h$是分片多项式插值算子, 则

$$\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V \leqslant \|u - \sqcap_h u\|_V,$$

因此, 由定理1.4.4, 有限元误差的估计最终归结为插值误差估计.

对于一般单元$T \in \mathcal{T}_h$上的插值误差估计, 有如下定理成立, 其证明可见参考文献[5, 6].

定理 1.4.5 设$\{(T,P,\Sigma)\}_{T\in\mathcal{T}_h}$为仿射等价的有限元族, $(\hat{T},\hat{P},\hat{\Sigma})$是标准(参考)有限元, s为插值数据$\hat{\Sigma}$中出现的导数最高的阶数, P_k为不超过k次的多项式全体, 且

$$\begin{cases} W^{k+1,p}(\hat{T}) \hookrightarrow C^s(\hat{T}), \\ W^{k+1,p}(\hat{T}) \hookrightarrow W^{m,q}(\hat{T}), \\ P_k(\hat{T}) \subset \hat{P} \subset W^{m,q}(\hat{T}). \end{cases}$$

则有

$$|v - \sqcap_T v|_{m,q,T} \leqslant C|T|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \frac{h_T^{k+1}}{\rho_T^m} |v|_{k+1,p,T}, \forall v \in W^{k+1,p}(T), \tag{1.4.18}$$

其中$\sqcap$是T上的P插值算子, $C = C(\hat{T},\hat{P},\hat{\Sigma})$为与参考元有关的正常数, $h_T = \mathrm{diam}T$, $\rho_T = \sup\{\mathrm{diam}S : 球S \subset T\}$. 进一步, 如果剖分$\mathcal{T}_h$是拟正则的, 即存在常数$\sigma > 0$, 使得

$$\frac{h_T}{\rho_T} \leqslant \sigma, \forall T \in \mathcal{T}_h, h \downarrow 0, \tag{1.4.19}$$

则有误差估计

$$|v - \sqcap_T v|_{m,q,T} \leqslant C h_T^{n(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} h_T^{k+1-m} |v|_{k+1,p,T}, \forall v \in W^{k+1,p}(T). \tag{1.4.20}$$

由以上单元上插值误差估计和定理1.4.4, 就可以得到多边形区域Ω上的插值误差估计.

定理 1.4.6 设单元上插值误差估计和Cèa引理的条件均满足, 即

(1) 剖分$\mathcal{T}_h$是拟正则的;

(2) 有限元族$\{(T,P_T,\Sigma_T)\}_{T\in\mathcal{T}_h}$仿射等价于一个参考元$(\hat{T},\hat{P},\hat{\Sigma})$;

(3) $\{(T,P_T,\Sigma_T)\}_{T\in\mathcal{T}_h}$是协调元, 即对于二阶问题是$C^0$类的, 对于四阶问题是$C^1$类的.

且

$$P_k(\hat{T}) \subset \hat{P} \subset H^l(\hat{T}), H^{k+1}(\hat{T}) \hookrightarrow C^s(\hat{T}),$$

其中$0 \leqslant l \leqslant k$, s为插值数据$\hat{\Sigma}$中出现的导数最高的阶数, 则对任意的$v \in H^{k+1}(\Omega) \cap V$,

$$\begin{cases} \|v - \sqcap_h\|_{m,\Omega} \leqslant C h^{k+1-m} |v|_{k+1,\Omega}, & 0 \leqslant m \leqslant \min(1,l), \\ \left(\sum\limits_T \|v - \sqcap_T v\|_{m,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant C h^{k+1-m} |v|_{k+1,\Omega}, & 2 \leqslant m \leqslant \min(k+1,l), \end{cases} \tag{1.4.21}$$

其中$\sqcap_h v$是v在V_h上的分片插值. 特别当$l=1$时, 即可得到二阶问题协调元方法的误差估计

$$\|u-u_h\|_{1,\Omega} \leqslant Ch^k|u|_{k+1,\Omega}. \tag{1.4.22}$$

证明 在定理1.4.5中令$p=q=2$, 即得

$$\|v-\sqcap_T v\|_{m,T} \leqslant Ch_T^{k+1-m}|v|_{k+1,T}, 0 \leqslant m \leqslant \min(k+1,l),$$

这是因为$\hat{P} \subset H^l(\hat{T}), \sqcap_T v = \sqcap_h v|_T \in H^l(T)$, 且$v \in H^{k+1}(\Omega)$. 因此

$$\left(\sum_T \|v-\sqcap_T v\|_{m,T}^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant Ch_T^{k+1-m}\left(\sum_T |v|_{k+1,T}^2\right)^{\frac{1}{2}} = Ch^{k+1-m}|v|_{k+1,\Omega}.$$

当$0 \leqslant m \leqslant \min(1,l)$时, 上式左端即为$\|v-\sqcap_h v\|_{m,\Omega}$. ¶

下面考虑有限元方法的分数阶误差估计. 对于协调有限元方法, 由Cèa引理,

$$\|u-u_h\|_{m,\Omega} \leqslant c_0 \inf_{v_h \in V_h} \|u-v_h\|_{m,\Omega}. \tag{1.4.23}$$

若插值$\sqcap_h u \in V_h$, 使得

$$\|u-\sqcap_h u\|_{m,\Omega} \leqslant ch^{k-m}\|u\|_{k,\Omega},$$

则有误差估计

$$\|u-u_h\|_{m,\Omega} \leqslant c_1 h^{k-m}\|u\|_{k,\Omega}. \tag{1.4.24}$$

关于非整数阶误差估计, 有如下定理成立, 其证明可见参考文献[5, 6].

定理 1.4.7 假定式(1.4.23)和式(1.4.24)成立, 令$m<s<k$, 则

$$\|u-u_h\|_{m,\Omega} \leqslant ch^{s-m}\|u\|_{s,\Omega}. \tag{1.4.25}$$

下面考虑非协调有限元的插值误差估计.

考虑问题: 求$u \in V$, 使得

$$a(u,v) = \langle l,v\rangle, \forall v \in V, \tag{1.4.26}$$

其中V是Hilbert空间, $a(\cdot,\cdot)$和l如前所述. 设有限元空间V_h为非协调元空间, 即$V_h \not\subseteq V$. 逼近问题为: 求$u_h \in V_h$, 使得

$$a_h(u_h,v_h) = \langle l,v_h\rangle, \forall v_h \in V_h, \tag{1.4.27}$$

其中

$$a_h(u_h,v_h) = \sum_T a(u_h|_T, v_h|_T), \tag{1.4.28}$$

$T \in \mathcal{T}_h$为单元. V_h中的范数定义为

$$\|v_h\|_h^2 = \sum_T \|v_h\|_{\cdot,T}^2, \forall v_h \in V_h. \tag{1.4.29}$$

例如对于二阶问题, $V\subset H^1(\Omega)$, 则$\|v\|_h^2=\sum\limits_T\|v_h\|_{1,T}^2$. 对于四阶问题, $V\subset H^2(\Omega)$, 则$\|v\|_h^2=\sum\limits_T\|v_h\|_{2,T}^2$.

对非协调元空间$V_h\not\subseteq V$, 由$a(\cdot,\cdot)$的V椭圆性不能直接推出$a_h(\cdot,\cdot)$的V_h椭圆性, 因此需要对$a_h(\cdot,\cdot)$加上如下的条件.

$$|a_h(u_h,v_h)|\leqslant M\|u_h\|_h\|v_h\|_h,\qquad \forall u_h,v_h\in V_h, \tag{1.4.30}$$

$$a_h(v_h,v_h)\geqslant \alpha\|v_h\|_h^2,\qquad \forall v_h\in V_h. \tag{1.4.31}$$

定理 1.4.8 设$a_h(\cdot,\cdot)$在V_h中是连续V椭圆的双线性型, $\|\cdot\|_h$是V_h中的范数, u和u_h分别为原问题(1.4.26)和其逼近问题(1.4.27)的解, 则有误差估计

$$\begin{cases}\|u-u_h\|_h\geqslant C_1\left(\inf_{v_h\in V_h}\|u-v_h\|_h+\sup_{\omega_h\in V_h}\frac{E_h(u,\omega_h)}{\|\omega_h\|_h}\right),\\ \|u-u_h\|_h\leqslant C_2\left(\inf_{v_h\in V_h}\|u-v_h\|_h+\sup_{\omega_h\in V_h}\frac{E_h(u,\omega_h)}{\|\omega_h\|_h}\right),\end{cases} \tag{1.4.32}$$

其中$E_h(u,\omega_h)=a_h(u,\omega_h)-\langle l,\omega_h\rangle$, C_1,C_2是与u,h无关的正常数.

证明 由三角不等式, 有

$$\|u-u_h\|_h\leqslant\|u-v_h\|_h+\|u_h-v_h\|_h.$$

根据$a_h(\cdot,\cdot)$的连续性和V_h椭圆性,

$$\begin{aligned}\alpha\|u_h-v_h\|_h^2 &\leqslant a_h(u_h-v_h,u_h-v_h)\\ &= a_h(u-u_h,v_h-u_h)+a_h(v_h-u,v_h-u_h)\\ &\leqslant a_h(u,v_h-u_h)-\langle l,v_h-u_h\rangle+M\|u-v_h\|_h\|v_h-u_h\|_h,\end{aligned}$$

于是若$v_h-u_h\neq 0$,

$$\begin{aligned}\|u_h-v_h\|_h &\leqslant C\left(\|u-v_h\|_h+\frac{a_h(u,v-h-u_h)-\langle l,v_h-u_h\rangle}{\|v_h-u_h\|_h}\right)\\ &\leqslant C\left(\|u-v_h\|_h+\sup_{\omega_h\in V_h}\frac{a_h(u,\omega_h)-\langle l,\omega_h\rangle}{\|\omega_h\|_h}\right).\end{aligned}$$

注意到$v_h\in V_h$是任意的, 因此由上式并结合三角不等式即可得到定理第二个不等式.

由$a_h(\cdot,\cdot)$的连续性, 可得

$$\begin{aligned}\|u-u_h\|_h &\geqslant \frac{1}{M}\sup_{\omega_h\in V_h}\frac{a_h(u,\omega_h)-a_h(u_h,\omega_h)}{\|\omega_h\|_h}\\ &= \frac{1}{M}\sup_{\omega_h\in V_h}\frac{a_h(u,\omega_h)-\langle f,\omega_h\rangle}{\|\omega_h\|_h},\end{aligned}$$

再根据$\|u-u_h\|_h\geqslant\inf\limits_{v_h\in V_h}\|u-v-h\|_h$, 即可得到定理第一个不等式. ¶

称

$$\sup_{\omega_h\in V_h}\frac{E_h(u,\omega_h)}{\|\omega_h\|_h} \tag{1.4.33}$$

为非协调误差. 对于协调元$V_h\subset V$的情况, 式(1.4.33)为零. 因此定理1.4.8可认为是协调元插值误差估计中Cèa引理的推广.

1.4.3 发展方程的有限元方法

这一小节不加证明地介绍一些发展方程有限元方法基本知识, 关于发展方程有限元方法的更多内容, 可见参考文献[10].

考虑热方程初边值问题

$$\begin{cases} u_t(t,x) - \Delta u(t,x) = f(x), & t > 0, x \in \Omega, \\ u(t,x) = 0, & t > 0, x \in \partial\Omega, \\ u(0,x) = \upsilon(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{1.4.34}$$

其中$\Omega \subset \mathbb{R}^d$是$d$维欧式空间中的凸区域, 具有光滑边界$\partial\Omega$.

首先考虑问题(1.4.34)对应的Poisson's方程Dirichlet问题

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.4.35}$$

令$\|\cdot\|$和$(\cdot,\cdot)$分别表示空间$L^2(\Omega)$中的范数和内积. 令$S_h \subset H_0^1(\Omega)$表示给定的一族有限维子空间, 对于某整数$r \geqslant 2$和充分小的$h$, 满足

$$\inf_{\chi \in S_h} \{\|\upsilon - \chi\| + h\|\nabla(\upsilon - \chi)\|\} \leqslant Ch^s \|\upsilon\|_{s,\Omega}, \forall \upsilon \in H^s(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), 1 \leqslant s \leqslant r. \tag{1.4.36}$$

式(1.4.35)的逼近问题是找到函数$u_h \in S_h$, 使得

$$(\nabla u_h, \nabla \chi) = (f, \chi), \forall \chi \in S_h. \tag{1.4.37}$$

定理 1.4.9 假定式(1.4.36)成立, u和u_h分别为式(1.4.35)和式(1.4.37)的解, 则对于$\forall 1 \leqslant s \leqslant r$,

$$\|u_h - u\| \leqslant Ch^s \|u\|_s, \quad \|\nabla u_h - \nabla u\| \leqslant Ch^{s-1} \|u\|_s.$$

在式(1.4.34)两边同时乘以光滑函数$\phi \in H_0^1(\Omega)$, 在Ω上积分, 再应用Green公式, 即可得问题(1.4.34)的弱形式:

$$(u_t, \phi) + (\nabla u, \nabla \phi) = (f, \phi), \forall \phi \in H_0^1(\Omega), t > 0. \tag{1.4.38}$$

如果$u \in L^2(0,\bar{t}; H_0^1(\Omega))$, $u_t \in L^2(0,\bar{t}, H^{-1}(\Omega))$, $u(0,\cdot) = \upsilon$, 并且式(1.4.38)成立, 则称$u(t,x)$是问题(1.4.34)在区间$[0,\bar{t}]$上的弱解.

基于式(1.4.38), 问题(1.4.34)的空间半离散是找到$u_h(t) = u_h(t,\cdot) \in S_h$, 使得

$$(u_{h,t}, \chi) + (\nabla u_h, \nabla \chi) = (f, \chi), \forall \chi \in S_h, u_h(0) = \upsilon_h, \tag{1.4.39}$$

其中υ_h是υ在S_h中的某种逼近.

原问题(1.4.34)与空间半离散问题(1.4.39)之间有如下误差估计, 其证明可见参考文献[10].

定理 1.4.10 假定u_h和u分别为式(1.4.39)和式(1.4.34)的解, υ在$\partial\Omega$上为零, 则有

$$\|u_h(t)-u(t)\| \leqslant \|\upsilon_h-\upsilon\| + Ch^r\left(\|\upsilon\|_{r,\Omega}+\int_0^t \|u_t\|_{r,\Omega}\mathrm{d}s\right), t\geqslant 0,$$

$$\begin{aligned}\|\nabla u_h(t)-\nabla u(t)\| \quad\leqslant\quad & C\|\nabla\upsilon_h-\nabla\upsilon\| + \\ & Ch^{r-1}\left(\|\upsilon\|_{r,\Omega}+\|u(t)\|_{r,\Omega}+\left(\int_0^t \|u_t\|_{r-1,\Omega}^2\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}\right), t\geqslant 0.\end{aligned}$$

下面考虑有限元方法的全离散, 即在空间半离散格式(1.4.39)的基础上再对时间变量进行离散. 在这里只介绍后向Euler格式, 更多有限元方法的全离散格式可见参考文献[10]. 令k表示时间步长, $t_n=nk, n=0,1,2,\cdots$, $U^n=U_h^n\in S_h$是对$u(t_n)$的逼近. 将空间半离散格式(1.4.39)中的时间导数用后向差商代替, 得

$$(\bar{\partial}U^n,\chi)+(\nabla U^n,\nabla\chi)=(f(t_n),\chi), \forall\chi\in S_h, n\geqslant 1, U^0=\upsilon_h, \tag{1.4.40}$$

其中$\bar{\partial}U^n=(U^n-U^{n-1})/k$. 如果$U^{n-1}$是给定的, 则$U^n$由如下隐式方程确定:

$$(U^n,\chi)+k(\nabla U^n,\nabla\chi)=(U^{n-1}+kf(t_n),\chi), \forall\chi\in S_h. \tag{1.4.41}$$

定理 1.4.11 假定U^n和u分别是式(1.4.40)和式(1.4.34)的解, 如果$\|\upsilon_h-\upsilon\|\leqslant Ch^r\|\upsilon\|_{r,\Omega}$, 并且$\upsilon(x)=0, x\in\partial\Omega$, 则

$$\|U^n-u(t_n)\|\leqslant Ch^r\left(\|\upsilon\|_{r,\Omega}+\int_0^{t_n}\|u_t\|_{r,\Omega}\mathrm{d}s\right)+k\int_0^{t_n}\|u_{tt}\|\mathrm{d}s,\ n\geqslant 0.$$

1.5 随机积分

随机积分及其性质是研究随机偏微分方程的基础, 因此本节介绍概率空间和随机过程的基本概念和性质, 在此基础上给出Q-Wiener过程以及关于此过程的随机积分并介绍随机积分的一些性质.

1.5.1 概率空间

设Ω是一个集合, $\mathcal{F}$是Ω上的一个子集族并且$\Omega\in\mathcal{F}$, 如果$\mathcal{F}$中元素关于可数并运算和补运算是封闭的, 即

(1) $\Omega\in\mathcal{F}$;

(2) $A\in\mathcal{F}\Rightarrow\bar{A}\in\mathcal{F}$;

(3) $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots\in\mathcal{F}\Rightarrow\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{F}$,

则称$\mathcal{F}$是集合Ω上的一个σ-代数或σ-域, $(\Omega,\mathcal{F})$为一个可测空间. 可测空间$(\Omega,\mathcal{F})$上的概率测度P是$\mathcal{F}\to[0,1]$的σ-可加函数, 并且$P(\Omega)=1$. 称三元组$(\Omega,\mathcal{F},P)$为概率空间. 如果$\mathcal{F}$ 包含所有的零测集, 则称概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P)$是完备的. 如无特别说明, 以下恒假定$(\Omega,\mathcal{F},P)$为完备的概率空间. 如下三个引理给出了概率测度P的基本性质, 更多概率测度的结论可见参考文献[11].

引理 1.5.1 设序列$\{E_n\}\subset\mathcal{F}$满足$E_n\subset E_{n+1},\forall n\geqslant 1$, 或者$E_n\supset E_{n+1},\forall n\geqslant 1$, 则有

$$\lim_{n\to\infty}P(E_n)=P(\lim_{n\to\infty}E_n).$$

证明 设$E_n\subset E_{n+1},\forall n\geqslant 1$. 定义$F_1=E_1, F_n=E_n\bigcap\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n-1}E_i\right)^c=E_n\cap E_{n-1}^c$, 则有$F_i\cap F_j=\emptyset(\forall i\neq j)$, 并且$\bigcup\limits_{i=1}^{n}F_i=\bigcup\limits_{i=1}^{n}E_i,\forall n\geqslant 1$, 所以

$$\begin{aligned}P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)&=P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(F_i)\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}P(F_i)=\lim_{n\to\infty}P\left(\bigcup_{i=n}^{\infty}F_i\right)\\&=\lim_{n\to\infty}P\left(\bigcup_{i=n}^{\infty}E_i\right)=\lim_{n\to\infty}P(E_n).\end{aligned}$$

若$E_n\supset E_{n+1},\forall n\geqslant 1$, 则$E_n^c\subset E_{n+1}^c,\forall n\geqslant 1$, 由上面证明有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i^c\right)=\lim_{n\to\infty}P(E_n^c).$$

由De Morgan定律, 上式等价于

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}E_i\right)^c=\lim_{n\to\infty}P(E_n^c),$$

即

$$1-P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}E_i\right)=\lim_{n\to\infty}(1-P(E_n)),$$

所以

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}E_i\right)=\lim_{n\to\infty}P(E_n).$$

¶

引理1.5.1称为概率测度P的连续性引理, 它在证明如下Borel-Cantelli引理中发挥着重要作用.

引理 1.5.2 (Borel-Cantelli引理) 设序列$\{E_n\}\subset\mathcal{F}$, 若$\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(E_i)<\infty$, 则

$$P(\limsup_{n\to\infty}E_n)=0.$$

证明 由概率测度P的连续性引理1.5.1可得,

$$\begin{aligned} P(\limsup_{n\to\infty} E_n) &= P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\right) \\ &= P\left(\lim_{n\to\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\right) \\ &\leqslant \lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{\infty} P(E_k) = 0. \end{aligned}$$

¶

对于Borel-Cantelli引理的逆命题, 有:

引理 1.5.3 若序列$\{E_n\}\subset\mathcal{F}$是相互独立的, 且$\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(E_n)=\infty$, 则

$$P(\limsup_{n\to\infty} E_n) = 1.$$

证明 由概率测度P的连续性引理1.5.1可得,

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\right) &= P\left(\lim_{n\to\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\right) = \lim_{n\to\infty}\left[1 - P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} E_k^c\right)\right]. \end{aligned}$$

但由独立性,

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} E_k^c\right) &= \prod_{i=n}^{\infty} P\left(E_i^c\right) = \prod_{i=n}^{\infty}(1-P(E_i)) \\ &\leqslant \prod_{i=n}^{\infty} \mathrm{e}^{-P(E_i)} = \exp\left(-\sum_{i=n}^{\infty} P(E_i)\right) = 0, \end{aligned}$$

上式不等号是因为$1-x\leqslant \mathrm{e}^{-x}, \forall x\in[0,1]$, 最后一个等号是由于对$\forall n$, $\sum\limits_{i=n}^{\infty} P(E_i) = +\infty$. ¶

1.5.2 随机变量与Bochner积分

设$(\Omega,\mathcal{F})$和$(E,\mathcal{G})$是两个可测空间, $X:\Omega\to E$是一个映射, 如果对于任意$A\in\mathcal{G}$, 集合$\{\omega\in\Omega: X(\omega)\in A\}=\{X\in A\}$属于$\mathcal{F}$, 则称$X$是$(\Omega,\mathcal{F})$到$(E,\mathcal{G})$的可测映射或者随机变量. 值域是有限集的随机变量称为简单随机变量. 若E是一个距离空间, 则E的Borel σ-域是包含E的所有开集(闭集)的最小σ-域, 记为$\mathcal{B}(E)$. E-值随机变量是指可测映射$X:(\Omega,\mathcal{F})\to(E,\mathcal{B}(E))$.

引理 1.5.4 设(E,ρ)为可分距离空间, X为一个E-值随机变量. 则存在一个简单随机变量序列$\{X_m\}$, 使得对任意的$\omega\in\Omega$, 序列$\{\rho(X(\omega),X_m(\omega))\}$单调递减趋于零.

证明 令$E_0=\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$为$E$的一个可数稠密子集. 对$m=1,2,\cdots$, 定义

$$\rho_m(\omega)=\min\{\rho(X(\omega),e_k),k=1,\cdots,m\},$$

$$k_m(\omega)=\min\{k\leqslant m:\rho_m(\omega)=\rho(X(\omega),e_k)\},$$

$$X_m(\omega)=e_{k_m(\omega)}.$$

显然有$X_m(\Omega)\subset\{e_1,\cdots,e_m\}$, 因此$X_m$是简单随机变量. 由$E_0$的稠密性, 对任意的$\omega\in\Omega$, $\{\rho_m(\omega)\}$单调递减趋于零, 又因为$\rho_m(\omega)=\rho(X(\omega),X_m(\omega))$, 因此结论成立. ¶

设$\mathcal{K}$是Ω的一个子集族, Ω上包含$\mathcal{K}$的最小σ-域, 记做$\sigma(\mathcal{K})$, 称为由$\mathcal{K}$生成的σ-域. 设集合$\{X_i\}_{i\in I}$为一族Ω到E的映射, 使得所有X_i都是$(\Omega,\sigma(X_i:i\in I))$到$(E,\mathcal{G})$的可测映射的$\Omega$上最小的$\sigma$-域$\sigma(X_i:i\in I)$, 称为由$\{X_i\}_{i\in I}$生成的$\sigma$-域.

Ω的子集族$\mathcal{K}$称为一个π-系统, 如果$\emptyset\in\mathcal{K}$并且如果$A,B\in\mathcal{K}$则$A\cap B\in\mathcal{K}$. 如下所述定理在证明映射或集合可测性中经常用到.

定理 1.5.1 假定$\mathcal{K}$是一个π-系统, $\mathcal{G}$是满足如下条件的Ω中最小的子集族,

(1) $\mathcal{K}\subset\mathcal{G}$;

(2) 如果$A\in\mathcal{G}$, 则$A^c\in\mathcal{G}$;

(3) 如果$A_1,A_2,\cdots\in\mathcal{G},A_n\cap A_m=\emptyset(\forall m\neq n)$, 则$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{G}$.

则$\mathcal{G}=\sigma(\mathcal{K})$.

证明 因为$\sigma(\mathcal{K})$满足(1), (2)和(3), 所以$\mathcal{G}\subset\sigma(\mathcal{K})$. 为证相反的包含关系只需证明$\mathcal{G}$是一个$\pi$-系统, 因为如果$\mathcal{G}$是一个$\pi$-系统且满足(2)和(3), 则$\mathcal{G}$是一个$\sigma$-域. 令$A\in\mathcal{G}$, 定义

$$\mathcal{G}_A=\{B\in\mathcal{G}:A\cap B\in\mathcal{G}\}.$$

因为如果$A,B\in\mathcal{G},A\cap B\in\mathcal{G}$, 则$A\cap B^c=A\cap(A\cap B)^c\in\mathcal{G}$, 所以$\mathcal{G}_A$满足(2). $\mathcal{G}_A$满足(3)是显然的并且如果$A\in\mathcal{K}$则$\mathcal{G}_A$也满足(1). 所以对于$A\in\mathcal{K}$, $\mathcal{G}_A=\mathcal{G}$. 即已证如果$A\in\mathcal{K},B\in\mathcal{G}$则$A\cap B\in\mathcal{G}$, 这意味着$\mathcal{G}_B\supset\mathcal{K}$, 因此$\mathcal{G}_B=\mathcal{G},\forall B\in\mathcal{G}$. ¶

引理 1.5.5 设E是一个可分的Banach空间, 则$\mathcal{B}(E)$是E中包含如下形式集合的最小σ-域.

$$\{x\in E:\phi(x)\leqslant\alpha\},\quad\forall\phi\in E^*,\alpha\in\mathbb{R}.\tag{1.5.1}$$

证明 因为E是可分的, 所以存在序列$\{\phi_n\}\subset E^*$, 使得

$$\|x\|=\sup_{n\in\mathbb{N}}|\phi_n(x)|,\ \forall x\in E.\tag{1.5.2}$$

因此, 对任意的$a\in E,r\geqslant 0$,

$$B(a,r)\quad=\quad\{a\in E:\|x-a\|<r\}=\bigcup_{m=1}^{\infty}\bar{B}(a,r(1-\frac{1}{m}))$$

$$= \bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=1}^{\infty}\{x \in E : |\phi_n(x-a)| \leqslant r(1-\frac{1}{m})\}.$$

这意味着包含式(1.5.1)形式集合的最小σ-域也包含E的开球型邻域, 所以包含$\mathcal{B}(E)$. ¶

由引理1.5.5, 若E是一个可分Banach空间, 则$X : \Omega \to E$是一个E-值随机变量, 当且仅当对任意的$\phi \in E^*$, $\phi(X) : \Omega \to \mathbb{R}$是实值随机变量.

如果$X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (E, \mathcal{G})$是一个随机变量, P是Ω上的概率测度, 则可以定义E上概率测度$\mu = \mathcal{L}(X)$,

$$\mu(A) = \mathcal{L}(X)(A) = P(\omega \in \Omega : X(\omega) \in A), \forall A \in \mathcal{G}. \tag{1.5.3}$$

概率测度$\mu = \mathcal{L}(X)$称为X的分布.

假定E是可分Banach空间, X是$(\Omega, \mathcal{F})$上简单E-值随机变量,

$$X = \sum_{i=1}^{N} x_i 1_{A_i}, \quad A_i \in \mathcal{F}, x_i \in E,$$

其中1_{A_i}表示A_i上的指示函数, 则可以定义X在$(\Omega, \mathcal{F})$上的积分

$$\int_B X(\omega)P(\mathrm{d}\omega) = \int_B X\mathrm{d}P = \sum_{i=1}^{N} x_i P(A_i \cap B), B \in \mathcal{F}. \tag{1.5.4}$$

不难验证, 上式定义的积分满足可加性和线性性质, 并且

$$\left\|\int_B X(\omega)P(\mathrm{d}\omega)\right\| \leqslant \int_B \|X(\omega)\|P(\mathrm{d}\omega). \tag{1.5.5}$$

设X是可分Banach空间E-值的随机变量, 则实值函数$\|X(\cdot)\|$关于$(\Omega, \mathcal{F})$是可测的. 如果

$$\int_\Omega \|X(\omega)\|P(\mathrm{d}\omega) < \infty, \tag{1.5.6}$$

则称随机变量X是Bochner可积的或者简称可积的.

令X为Bochner可积随机变量, 由引理1.5.4, 存在简单随机变量序列$\{X_m\}$, 使得

$$\|X(\omega) - X_m(\omega)\| \to 0, (m \to \infty), \forall \omega \in \Omega.$$

所以有

$$\begin{aligned} & \left\|\int_\Omega X_n(\omega)P(\mathrm{d}\omega) - \int_\Omega X_m(\omega)P(\mathrm{d}\omega)\right\| \\ \leqslant & \int_\Omega \|X_n(\omega) - X(\omega)\|P(\mathrm{d}\omega) + \\ & \int_\Omega \|X(\omega) - X_m(\omega)\|P(\mathrm{d}\omega) \to 0, \quad m, n \to \infty. \end{aligned}$$

因此, X的积分可以定义为

$$\int_\Omega X(\omega)P(\mathrm{d}\omega) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega X_n(\omega)P(\mathrm{d}\omega). \tag{1.5.7}$$

由以上分析过程, 积分定义式(1.5.7)与随机变量序列$\{X_m\}$的选取无关. 由式(1.5.7)定义的积分称为Bochner积分. 积分式$\int_\Omega X(\omega)P(\mathrm{d}\omega)$通常记做$E(X)$.

记$L^P(\Omega,\mathcal{F},P;E), 1\leqslant p\leqslant+\infty$为可积$E$-值随机变量等价类的集合. 定义范数

$$\|X\|_p^p=E\|X\|^p, p\in[1,+\infty);\quad \|X\|_\infty=\operatorname*{ess\,sup}_{\omega\in\Omega}\|X(\omega)\|,$$

则在范数$\|X\|_p, 1\leqslant p\leqslant+\infty$下, $L^P(\Omega,\mathcal{F},P;E)$构成Banach空间. 如果$\Omega=[0,T]$是一个区间, $\mathcal{F}=\mathcal{B}([0,T])$, P为$[0,T]$上的Lebesgue测度, 则简记$L^P(\Omega,\mathcal{F},P;E)=L^P(0,T;E)$.

设$(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$是一个可分Hilbert空间, $a,b\in H$, 定义运算$a\otimes b$为一个线性算子,

$$(a\otimes b)h=a\langle b,h\rangle,\quad \forall h\in H. \tag{1.5.8}$$

如果$X,Y\in L^2(\Omega,\mathcal{F},P;H)$, 定义$X$的协方差算子$\mathrm{Cov}(X)$和$(X,Y)$的相关算子$\mathrm{Cor}(X,Y)$为

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X)&=E(X-EX)\otimes(X-EX),\\ \mathrm{Cor}(X,Y)&=E(X-EX)\otimes(Y-EY).\end{aligned}$$

由上述定义, $\mathrm{Cov}(X)$是一个对称、正定的核算子, 并且有

$$\mathrm{TrCov}(X)=E\|X-EX\|^2. \tag{1.5.9}$$

事实上, 如果$\{e_k\}$是H的一组完备正交规范基, 为简单起见令$EX=0$, 则有

$$\begin{aligned}\mathrm{TrCov}(X)&=\sum_{h=1}^{\infty}\langle\mathrm{Cov}(X)e_h,e_h\rangle\\ &=\sum_{h=1}^{\infty}\int_\Omega|\langle X(\omega),e_h\rangle|^2P(\mathrm{d}\omega)=E\|X\|^2.\end{aligned}$$

设$E=\mathbb{R}^1$为实数域, X,Y为概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P)$上的实值随机变量, $\int_\Omega|X|\mathrm{d}P<+\infty$, 则称

$$EX=\int_\Omega X\mathrm{d}P$$

为随机变量X的数学期望. 称$DX=E(X-EX)^2$为随机变量X的方差. 称

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E\left[(X-EX)(Y-EY)\right]$$

为(X,Y)的协方差. 对于自然数k, 称

$$EX^k=\int_\Omega X^k\mathrm{d}P$$

为随机变量X的k阶矩.

1.5.3 条件期望与独立性

条件期望在随机分析中起着重要作用, 其定义如下:

定义 1.5.1 设E是可分Banach空间, X是概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P)$上Bochner可积的E-值随机变量, $\mathcal{H}$是$\mathcal{F}$的子σ-域, 则存在唯一关于$\mathcal{H}$可测的可积E-值随机变量Z, 使得

$$\int_A X\mathrm{d}P=\int_A Z\mathrm{d}P, \forall A\in\mathcal{H}. \tag{1.5.10}$$

随机变量Z记作$E(X|\mathcal{H})$, 称为X关于$\mathcal{H}$的条件期望.

设$\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$是$\mathcal{F}$的一族子$\sigma$-域, 如果对任意的有限子集$J\subset I$,

$$P\left(\bigcap_{i\in J}A_i\right)=\prod_{i\in J}P(A_i),\quad \forall A_i\in\mathcal{F}_i, i\in J, \tag{1.5.11}$$

则称$\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$是独立的. 如果$\sigma$-域$\{\sigma(X_i)\}_{i\in I}$是独立的, 则称随机变量$\{X_i\}_{i\in I}$是独立的.

条件期望和独立性有如下重要性质, 其证明可见参考文献[12].

定理 1.5.2 如果$\mathcal{G}\subset\mathcal{F}$是一个$\sigma$-域, $X,Y:\Omega\to E$为可积随机变量, $a,b\in\mathbb{R}$, 则条件期望有下列性质:

(1) $E(aX+bY|\mathcal{H})=aE(X|\mathcal{H})+bE(Y|\mathcal{H})$.

(2) 如果$\mathcal{G}$是平凡域$\{\emptyset,\Omega\}$, 则$E(X|\mathcal{G})=EX$.

(3) 如果X是$\mathcal{G}$可测的, X,Y是实值的随机变量, 则$E(XY|\mathcal{G})=XE(Y|\mathcal{G})$.

(4) 如果$\mathcal{G}_1\subset\mathcal{G}_2$, 则

$$E(E(X|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1)=E(X|\mathcal{G}_1).$$

在上式中令$\mathcal{G}_1$为平凡域, 得到双期望律

$$E(E(X|\mathcal{G}))=E(X).$$

(5) 如果X与$\mathcal{G}$是独立的, 则$E(X|\mathcal{G})=E(X)$.

(6) 如果X是实值随机变量, $g(x)$是$\mathbb{R}$上凸函数, 则有如下Jensen不等式

$$g(E(X|\mathcal{G}))\leqslant E(g(X)|\mathcal{G}).$$

在上式中令$g(x)=|x|$, 得到

$$|E(X|\mathcal{G})|\leqslant E(|X||\mathcal{G}).$$

(7) 如果实值随机变量序列$0\leqslant X_n$, 并且$X_n\uparrow X, E|X|<\infty$, 则

$$E(X_n|\mathcal{G})\uparrow E(X|\mathcal{G}).$$

(8) 如果实值随机变量序列$0 \leqslant X_n$, 则

$$E(\liminf_n X_n|\mathcal{G}) \leqslant \liminf_n E(X_n|\mathcal{G}).$$

(9) 如果$\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X, a.s.$, 并且$\|X_n\| \leqslant \|Y\|, E\|Y\| < \infty$, 则

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n|\mathcal{G}) = E(X|\mathcal{G}).$$

1.5.4 Gaussian测度

设E为可分的Banach空间, $\mathcal{B}(E)$为E的Borel σ-域, μ是$(E,\mathcal{B}(E))$上的概率测度. 定义在E^*上的函数ϕ_μ:

$$\phi_\mu(y^*) = \int_E \mathrm{e}^{iy^*(x)}\mu(\mathrm{d}x), \quad y^* \in E^*, \tag{1.5.12}$$

称为测度μ的特征函数, 通常记做$\phi_\mu = \hat{\mu}$. 如果$(E,\mathcal{B}(E))$上的两个测度μ,ν满足$\forall y^* \in E^*$, $\hat{\mu}(y^*) = \hat{\nu}(Y^*)$, 则测度$\mu = \nu$, 即特征函数相等的两个测度是相等的.

设Q是一个$n \times n$对称正定矩阵, $m \in \mathbb{R}^n$, 则$\mathbb{R}^n$上函数

$$g_{m,Q}(x) = ((2\pi)^n \det Q)^{-\frac{1}{2}} \exp(-\frac{1}{2}\langle Q^{-1}(x-m),(x-m)\rangle)$$

是$\mathbb{R}^n$上概率测度的密度函数, 这个概率测度称为非退化Gaussian测度, 记做$\mathcal{N}(m,Q)$, 其特征函数为

$$\widehat{\mathcal{N}}(m,Q)(x) = \mathrm{e}^{i\langle x,m\rangle - \frac{1}{2}\langle Qx,x\rangle}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.5.13}$$

如果$\mathbb{R}^n$值的随机变量X的分布$\mathcal{L}(X) = \mathcal{N}(m,Q)$, 则$EX = m, \mathrm{Cov}X = Q$. $\mathbb{R}^1$上测度μ具有形式$\mathcal{N}(0,q)$, $q \geqslant 0$, 当且仅当对任意的独立实值随机变量$\xi,\eta,\mathcal{L}(\xi) = \mathcal{L}(\eta) = \mu$和实数$\alpha,\beta,\alpha^2 + \beta^2 = 1$, 成立$\mathcal{L}(\alpha\xi + \beta\eta) = \mu$.

设μ是可分Banach空间E上概率测度, 如果对任意的$h \in E^*$, 作为$(E,\mathcal{B}(E),\mu)$上的实值随机变量, 其分布是$(\mathbb{R}^1,\mathcal{B}(\mathbb{R}^1))$上的Gsussian测度, 则称$\mu$是$E$上Gaussian测度. 如果对任意的$h \in E^*$, 其分布是$(\mathbb{R}^1,\mathcal{B}(\mathbb{R}^1))$上的对称Gsussian测度, 则称$\mu$为$E$上对称Gaussian测度.

设$(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$是可分Hilbert空间. 由Gaussian测度定义, μ是$(H,\mathcal{B}(H))$上Gaussian测度, 如果对任意的$h \in H$, 存在$m \in \mathbb{R}^1, q \geqslant 0$, 使得

$$\mu\{x \in H : \langle h,x\rangle \in A\} = \mathcal{N}(m,q)(A), \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1).$$

设μ是$(H,\mathcal{B}(H))$上Gaussian测度, 则存在$m \in H$和H上对称非负线性连续算子Q, 使得

$$\int_H \langle h,x\rangle\mu(\mathrm{d}x) = \langle m,h\rangle, \quad \forall h \in H, \tag{1.5.14}$$

$$\begin{aligned}&\int_H \langle h_1,x\rangle\langle h_2,x\rangle\mu(\mathrm{d}x)\\ = \;&\langle m,h_1\rangle\langle m,h_2\rangle + \langle Qh_1,h_2\rangle, \quad \forall h_1,h_2 \in H.\end{aligned} \tag{1.5.15}$$

称m为μ的均值, Q为μ的协方差算子. μ的特征函数具有形式

$$\hat{\mu}(\lambda) = \int_H \mathrm{e}^{i\langle\lambda,x\rangle}\mu(\mathrm{d}x) = \mathrm{e}^{i\langle\lambda,m\rangle - \frac{1}{2}\langle Q\lambda,\lambda\rangle}, \quad \lambda \in H.$$

因此μ可由m和Q完全决定, 记做$\mu=\mathcal{N}(m,Q)$.

由核算子的定义, 如果μ是Hilbert空间H上Gaussian概率测度, 则μ的协方差算子是一个核算子, 如果μ的均值为零, 则$\mathrm{Tr}(Q)=E\|X\|^2<+\infty$. 进一步如果$Q$是$H$上的一个正定对称的核算子, $m\in H$, 则存在H上Gaussian测度以m为均值, Q为协方差算子.

1.5.5 随机过程与鞅

下面给出Banach空间值随机过程的定义和基本性质.

设E为可分的完备度量空间, $\mathcal{B}(E)$是E的Borel σ-域, I是$\mathbb{R}$中的区间. 若对任意$t\in I$, $X(t,\omega)$是E上的一个随机变量, 则随机变量族$X(t)=\{X(t,\omega)\}_{t\in I}$称为随机过程. $X(\cdot,\omega)$称为$X(t,\omega)$的一个路径. 随机过程Y称为X的一个修正, 或者等价形, 如果

$$P(\omega\in\Omega:X(t,\omega)\neq Y(t,\omega))=0,\quad \forall t\in I.$$

下面给出随机过程X在区间$I=[0,T]$上正则性的几个定义.

定义 1.5.2 *设X是定义在区间$I=[0,T]$上的随机过程.*

(1) *如果映射$X(\cdot,\cdot):I\times\Omega\to E$是$\mathcal{B}(I)\times\mathcal{F}$可测的, 则称$X$是可测的;*

(2) *如果对$\forall\varepsilon>0,\forall\delta>0$, 存在$\rho>0$使得*

$$P(\|X(t)-X(t_0)\|\geqslant\varepsilon)\leqslant\delta,\qquad \forall t\in[t_0-\rho,t_0+\rho]\cap[0,T], \tag{1.5.16}$$

则称X在点$t_0\in I$是随机连续的;

(3) *如果X在I中每个点都随机连续, 则称X在区间I上是随机连续的;*

(4) *如果对$\forall\varepsilon>0,\forall\delta>0$, 存在$\rho>0$, 使得*

$$P(\|X(t)-X(s)\|\geqslant\varepsilon)\leqslant\delta,\forall t,s\in[0,T],|t-s|<\rho, \tag{1.5.17}$$

则称X在区间$I=[0,T]$上是一致随机连续的;

(5) *如果*

$$\lim_{t\to t_0}E(\|X(t)-X(t_0)\|^2)=0, \tag{1.5.18}$$

则称X在$t_0\in I$是均方连续的;

(6) *如果路径$X(\cdot,\omega)$几乎处处连续, 则称X是以概率1连续的;*

(7) *如果路径$X(\cdot,\omega)$几乎处处α-Hölder连续, 则称X是以概率1 α-Hölder连续的.*

设$X(t)$是有限区间$[0,T]$上的随机连续过程, 在可分Banach空间E上取值, 则X在$[0,T]$上一致随机连续并且存在X的可测的等价形. 如下著名的Kolmogorov定理给出了随机过程等价形的正则性结论, 其证明可见参考文献[3].

定理 1.5.3 设随机过程$X(t), t \in [0,T]$在可分Banach空间E上取值, 存在常数$C > 0$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 1$, 对任意的$t, s \in [0,T]$,

$$E\|X(t) - X(s)\|^{\delta} \leqslant C|t-s|^{1+\varepsilon}. \tag{1.5.19}$$

则存在$X(t)$的一个几乎处处Hölder连续的等价形, 并且其Hölder指数小于$\frac{\varepsilon}{\delta}$.

设$(\Omega, \mathcal{F})$是一个可测空间, 指标集$I = [0,T]$或者$[0,\infty)$, $\mathcal{F}$中的全序子集$\{\mathcal{F}_t\}_{t\in I}$如果满足

$$\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_s, \quad \forall t \leqslant s,$$

则称$\{\mathcal{F}_t\}_{t\in I}$为一个$\sigma$-域流. 如果对任意的$A \in \mathcal{F}$满足$P(A) = 0$, 都有$A \subset \mathcal{F}_0$, 并且对任意的$t \in [0,T]$, $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+} = \bigcap_{s>t}\mathcal{F}_s$, 则称$\sigma$-域流$\{\mathcal{F}_t\}_{t\in I}$是规范的. 如果对任意$t \in I$, 随机变量$X(t,\omega)$是$\mathcal{F}_t$可测的, 则称随机过程$X(t), t \in I$关于$\sigma$-域流$\{\mathcal{F}_t\}_{t\in I}$是适应的. 如果对任意$t \in I$, 映射

$$[0,t] \times \Omega \to E, \quad (s,\omega) \to X(s,\omega)$$

是$\mathcal{B}([0,T]) \times \mathcal{F}_t$-可测的, 则称$X(t), t \in I$是循序可测的. 适应的随机连续过程存在循序可测的等价形.

由$[0,\infty) \times \Omega$的子集

$$(s,t] \times F, \quad 0 \leqslant s < t < \infty,\ F \in \mathcal{F}_s \text{和} \{0\} \times F,\ F \in \mathcal{F}_0, \tag{1.5.20}$$

生成的σ-域$\mathcal{P}_\infty$在随机积分中起着重要的作用. $\mathcal{P}_\infty$称为可料σ-域, 其中的元素称为可料集. 可料σ-域$\mathcal{P}_\infty$在$[0,T]\times\Omega$的限制记作$\mathcal{P}_T$. 从$([0,\infty)\times\Omega, \mathcal{P}_\infty)$或者$([0,T]\times\Omega, \mathcal{P}_T)$到$(E, \mathcal{B}(E))$的可测映射称为可料过程. 由$\mathcal{P}_\infty$的定义, 可料过程必定是可测的.

随机过程$X(t), t \in I$称为是可积的, 如果对任意的$t \in I$, 都有$E\|X(t)\| < +\infty$. 设E-值随机过程$X(t), t \in I$可积并且适应, 如果

$$E(X(t)|\mathcal{F}_s) = X(s), \quad \forall t, s \in I, t \geqslant s, \quad P-a.s., \tag{1.5.21}$$

则X称为是鞅. 如果$X(t), t \in I$是实值可积适应的随机过程, 满足

$$E(X(t)|\mathcal{F}_s) \geqslant X(s) \quad (E(X(t)|\mathcal{F}_s) \leqslant X(s)), \quad P-a.s., \tag{1.5.22}$$

则$X(t), t \in I$称为是一个下鞅(上鞅).

设$M(t), t \in [0,T]$是一个鞅, 则$\|M(t)\|$是一个下鞅. 事实上, 令$t > s, t, s \in [0,T]$, 则有

$$\begin{aligned} \|M(s)\| &= \|E((M(s) - M(t))|\mathcal{F}_s) + E(M(t)|\mathcal{F}_s)\| \\ &\leqslant \|E((M(s) - M(t))|\mathcal{F}_s)\| + \|E(M(t)|\mathcal{F}_s)\| \leqslant E(\|M(t)\||\mathcal{F}_s), \quad P-a.s. \end{aligned} \tag{1.5.23}$$

由式(1.5.23)和实值下鞅不等式, 可以得到如下鞅不等式, 其证明可见文献[3].

定理 1.5.4 设$M(t), t\in I$是一个连续E-值鞅, $p\geqslant 1$, 则对任意的$\lambda>0$, 成立

$$P(\sup_{t\in I}\|M(t)\|\geqslant\lambda)\leqslant\lambda^{-p}\sup_{t\in I}E(\|M(t)\|^p). \tag{1.5.24}$$

如果$p>1$, 则有

$$E(\sup_{t\in I}\|M(t)\|^p)\leqslant\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sup_{t\in I}E(\|M(t)\|^p). \tag{1.5.25}$$

令$\mathcal{M}_T^2(E)$表示$[0,T]$上E-值连续均方可积鞅的集合. 定义范数

$$\|M\|^2_{\mathcal{M}_T^2(E)}=\left(E\sup_{t\in[0,T]}\|M(t)\|^2\right). \tag{1.5.26}$$

则在范数$\|M\|_{\mathcal{M}_T^2(E)}$下, $\mathcal{M}_T^2(E)$构成一个Banach空间.

设H是一个可分Hilbert空间, 下面定义H-值鞅$M\in\mathcal{M}_T^2(H)$的二次变差过程.

核算子空间$\mathcal{L}_1=\mathcal{L}_1(H)$在核范数下是一个可分Banach空间. $\mathcal{L}_1$-值随机过程$V(\cdot)$称为递增的, 如果对任意的$0\leqslant t\leqslant s\leqslant T$, $V(t)$是非负的, 并且$V(t)\leqslant V(s)$. $\mathcal{L}_1$-值连续适应递增的随机过程V使得$V(0)=0$, 称为是鞅$M(\cdot)$的二次变差过程, 当且仅当对任意的$a,b\in H$, 随机过程

$$\langle M(t),a\rangle\langle M(t),b\rangle-\langle V(t)a,b\rangle,\quad t\in[0,T] \tag{1.5.27}$$

是一个$\{\mathcal{F}_t\}$-鞅, 又等价于随机过程

$$M(t)\otimes M(t)-V(t),\quad t\in[0,T] \tag{1.5.28}$$

是一个$\{\mathcal{F}_t\}$-鞅. 鞅$M\in\mathcal{M}_T^2(H)$存在唯一的二次变差过程, 记做$\ll M(t)\gg$. 设$\{e_i\}$为H的一组完备正交规范基, 则$M_i(t)=\langle M(t),e_i\rangle$为互相独立的连续实值均方可积鞅, 并且二次变差$\ll M(t)\gg$有表达式

$$\ll M(t)\gg=\sum_{i,j=1}^{\infty}\ll M_i(t),M_j(t)\gg e_i\otimes e_j,\quad t\in[0,T], \tag{1.5.29}$$

其中$\ll M_i(t),M_j(t)\gg$表示实值连续均方可积鞅的交叉二次变差, 定义为初值为零, 并且使

$$M_i(t)M_j(t)-\ll M_i(t),M_j(t)\gg,\quad t\in[0,T]$$

成为连续鞅的唯一的适应过程. 关于鞅的二次变差, 有不等式

$$E\left(\sup_{t\in[0,T]}\|M(t)\|\right)\leqslant 3E(\ll M(t)\gg^{\frac{1}{2}}),\quad\forall M\in\mathcal{M}_T^2(H). \tag{1.5.30}$$

定义在$(\Omega,\mathcal{F})$上的非负实值随机变量τ称为是$\mathcal{F}_t$-停时, 如果对任意的$t\geqslant 0$, $\{\omega\in\Omega:\tau(\omega)\leqslant t\}\in\mathcal{F}_t$.

可分Hilbert空间H-值的随机过程$X(t), t\in[0,+\infty)$称为是Gaussian随机过程, 如果对任意的正整数$n\in\mathbb{N}$和正数$t_1,\cdots,t_n$, H^n-值的随机变量$(X(t_1),\cdots,X(t_n))$是Gaussian随机变量. 设$X(t)$是H-值的Gaussian随机过程, 令

$$m(t)=E(X(t)),\quad Q(t)=E((X(t)-m(t))\otimes(X(t)-m(t))),\ t\geqslant 0.$$

则称$m(t)$为$X(t)$的均值过程, $Q(t)$为$X(t)$的协方差过程.

1.5.6 关于Q-Wiener过程的随机积分

下面给出Q-Wiener过程的概念和基本性质. 设H和U是两个可分Hilbert空间, Q是U上的对称非负线性算子, $\mathrm{Tr}(Q) < +\infty$, 则在空间U中存在一组完备正交规范基$\{e_i\}$, 以及一组有界非负的实数$\{\gamma_i\}$使得

$$Qe_i = \gamma_i e_i, \quad i = 1, 2, \cdots.$$

定义 1.5.3 设$\{W(t), t \geqslant 0\}$是定义在$(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}, P)$上的$U$-值随机过程并且满足:

(1) $W(0) = 0$;

(2) $W(t)$有连续的路径;

(3) $W(t)$有独立的增量;

(4) $W(t) - W(s)$ $(0 \leqslant s \leqslant t)$是0均值, 协方差算子为$(t-s)Q$的$U$-值Gaussian随机变量.

则称$W(t)$为Q-Wiener过程.

由Kolmogorov扩张定理, 对可分Hilbert空间U上任意的对称非负核算子Q, 存在U-值Q-Wiener过程$W(t), t \geqslant 0$, 使得如下定理成立.

定理 1.5.5 设$W(t)$是一个Q-Wiener过程, $\mathrm{Tr}(Q) < +\infty$, 则有

(1) $W(t)$是U-值Gaussian随机过程, 并且有

$$E(W(t)) = 0, \quad \mathrm{Cov}(W(t)) = tQ, \quad t \geqslant 0. \tag{1.5.31}$$

(2) 对任意的$t \geqslant 0$, $W(t)$有如下展开式

$$W(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\gamma_j}\beta_j(t)e_j, \tag{1.5.32}$$

其中

$$\beta_j(t) = \frac{1}{\sqrt{\gamma_j}}\langle W(t), e_j\rangle, \ j = 1, 2, \cdots \tag{1.5.33}$$

是概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, P)$上相互独立的实值Brownian运动, 并且式(1.5.32)在$L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$中收敛.

证明 设$0 < t_1 < \cdots < t_n$和$u_1, u_2, \cdots, u_n \in U$. 考虑下列随机变量

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{j=1}^{n}\langle W(t_j), u_j\rangle = \langle W(t_1), \sum_{k=1}^{n} u_k\rangle + \\ &\quad \langle W(t_2) - W(t_1), \sum_{k=1}^{n} u_k\rangle + \cdots + \langle W(t_n) - W(t_{n-1}), u_n\rangle. \end{aligned}$$

根据W独立增量的性质可知, 对于$u_1, u_2, \cdots, u_n$的选取, Z满足Gaussian分布, (1)得证.

下面证明(2). 设$t > s > 0$, 由式(1.5.33)可得

$$
\begin{aligned}
E(\beta_i(t)\beta_j(s)) &= \frac{1}{\sqrt{\gamma_i\gamma_j}}E(\langle W(t),e_i\rangle\langle W(s),e_j\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\gamma_i\gamma_j}}[E(\langle W(t)-W(s),e_i\rangle\langle W(s),e_j\rangle) \\
&\quad +E(\langle W(s),e_i\rangle\langle W(s),e_j\rangle)] \\
&= \frac{s}{\sqrt{\gamma_i\gamma_j}}\langle Qe_i,e_j\rangle = s\delta_{ij}.
\end{aligned}
$$

因此$\beta_j(j=1,2,\cdots)$是相互独立的. 注意到对于$1\leqslant m\leqslant n<\infty$, 有

$$
E\left\|\sum_{j=n}^{m}\sqrt{\gamma_j}\beta_j(t)e_j\right\|^2 = t\sum_{j=n}^{m}\gamma_j. \tag{1.5.34}
$$

因为$\sum\limits_{j=1}^{\infty}\gamma_j<\infty$, 所以式(1.5.32)成立. ¶

根据二次变差过程的定义(1.5.29), 可以求得Q-Wiener过程的二次变差过程为

$$
\ll W(t)\gg = tQ,\quad t\geqslant 0.
$$

由Levy's定理[3], Q-Wiener过程与鞅之间的关系可由如下定理给出, 其证明可见参考文献[3].

定理 1.5.6 设鞅$M\in\mathcal{M}_T^2(H), M(0)=0$, 则以下两个条件等价.

(1) M是$[0,T]$上关于σ-域流$\{\mathcal{F}_t\}$适应的Q-Wiener过程, 对$\forall 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$, 增量$M(t)-M(s)$与$\mathcal{F}_s$相互独立.

(2) M的二次变差过程$\ll M(t)\gg = tQ, t\in[0,T]$.

设$\varPhi(t)$是一个$\mathcal{L}(U,H)$值随机过程, 如果存在一个实数序列$0=t_0<t_1<\cdots<t_k=T$和一个$L(U,H)$值随机变量序列$\varPhi_0,\varPhi_1,\cdots,\varPhi_{k-1}$, 使得

(1) $\varPhi_m$是$\mathcal{F}_{t_m}$可测的;

(2) $\varPhi(t)=\varPhi_m$, 其中$t\in(t_m,t_{m+1}]$, $m=0,1,\cdots,k-1$,

则称$\varPhi(t)$为初等随机过程. 对于初等过程$\varPhi(t)$, 可以定义随机积分如下

$$
\int_0^t \varPhi(s)\mathrm{d}W(s) = \sum_{m=0}^{k-1}\varPhi_m(W_{t_{m+1}\wedge t}-W_{t_m\wedge t}), t\in[0,T]. \tag{1.5.35}
$$

随机积分式(1.5.35)记作$\varPhi\cdot W(t), t\in[0,T]$.

定义空间

$$
L_2(\varOmega;H) = \left\{v : E\|v\|_H^2 = \int_{\varOmega}\|v(\omega)\|_H^2\mathrm{d}P(\omega)<\infty\right\},
$$

其相应的范数为

$$
\|v\|_{L_2(\varOmega;H)} = \left(E\|v\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}.
$$

定义Hilbert-Schmidt算子空间$L_2^0=\mathcal{L}_2(Q^{\frac{1}{2}}(U);H)$, 其对应的范数为

$$\|\Psi\|_{L_2^0}^2=\|\Psi Q^{\frac{1}{2}}\|_{\mathrm{HS}}^2=\mathrm{Tr}(\Psi Q\Psi^*).$$

设$\Phi(t),t\in[0,T]$是一个可测的L_2^0-值随机过程, 定义范数

$$|||\Phi(t)|||_t=\left\{E\int_0^t\|\Phi(s)\|_{L_2^0}^2\mathrm{d}s\right\}^{\frac{1}{2}}=\left\{E\int_0^t\mathrm{Tr}(\Phi(s)Q^{\frac{1}{2}})(\Phi(s)Q^{\frac{1}{2}})^*\mathrm{d}s\right\}^{\frac{1}{2}},t\in[0,T]. \quad (1.5.36)$$

定理 1.5.7 设$\Phi(t),t\in[0,T]$是一个初等L_2^0-值随机过程, $|||\Phi(t)|||_T<\infty$, 则$\Phi\cdot W$是一个连续并且均方可积的H-值鞅, 并且成立

$$E\|\Phi\cdot W(t)\|^2=|||\Phi|||_t^2,\quad t\in[0,T]. \quad (1.5.37)$$

证明 $\Phi\cdot W$是一个连续并且均方可积的H-值鞅是显然的. 下证式(1.5.37)对$t=t_m\leqslant T$成立. 定义$\zeta_j=W(t_{j+1})-W(t_j),j=0,1,\cdots,m-1$. 则有

$$\begin{aligned}E\|\Phi\cdot W(t)\|^2&=E\|\sum_{j=0}^{m-1}\Phi(t_j)\zeta_j\|^2\\&=E\sum_{j=0}^{m-1}\|\Phi(t_j)\zeta_j\|^2+2E\sum_{i<j=0}^{m-1}\langle\Phi(t_i)\zeta_i,\Phi(t_j)\zeta_j\rangle.\end{aligned}$$

令$\{f_l\}_{l=1}^\infty$表示H的一组标准正交基, 注意到随机变量$\Phi^*(t_j)f_l$是$\mathcal{F}_{t_j}$可测的, ζ_j与$\mathcal{F}_{t_j}$是相互独立的, 因此

$$\begin{aligned}E\|\Phi(t_j)\zeta_j\|^2&=\sum_{l=1}^\infty E|\langle\Phi(t_j)\zeta_j,f_l\rangle|^2\\&=\sum_{l=1}^\infty E(E|\langle\zeta_j,\Phi^*(t_j)f_l\rangle|^2|\mathcal{F}_{t_j})\\&=(t_{j+1}-t_j)\sum_{l=1}^\infty E(\langle Q\Phi^*(t_j)f_l,\Phi^*(t_j)f_l\rangle)\\&=(t_{j+1}-t_j)\sum_{l=1}^\infty\|Q^{\frac{1}{2}}\Phi^*(t_j)f_l\|^2\\&=(t_{j+1}-t_j)\|\Phi(t_j)\|_{L_2^0}^2.\end{aligned}$$

于是得

$$E\sum_{j=0}^{m-1}\|\Phi(t_j)\zeta_j\|^2=\sum_{j=0}^{m-1}(t_{j+1}-t_j)E\|\Phi(t_j)\|_{L_2^0}^2,\quad j=0,1,\cdots,m-1. \quad (1.5.38)$$

用同样的方法可证

$$E\langle\Phi(t_i)\zeta_i,\Phi(t_j)\zeta_j\rangle=0,\quad i\neq j. \quad (1.5.39)$$

由式(1.5.38)和范数$|||\cdot|||_t$的定义, 结论成立. ¶

为将随机积分推广到更一般的随机变量, 定义乘积空间$(\Omega_T=[0,T]\times\Omega,\mathcal{B}([0,T])\times\mathcal{F})$. 则有如下定理成立, 其证明可见文献[3].

定理 1.5.8 设$\varPhi(t)$是一个$\mathcal{L}(U,H)$值随机过程.

(1) 如果映射$\varPhi: \varOmega_T \to \mathcal{L}(U,H)$是$\mathcal{L}(U,H)$可料的, 则$\varPhi$也是$L_0^2$可料的. 特别初等过程也是$L_2^0$可料的.

(2) 如果$\varPhi$是一个L_2^0可料过程, 并且$|||\varPhi|||_T < \infty$, 则存在一个初等过程序列$\{\varPhi_n\}$, 使得

$$|||\varPhi - \varPhi_n|||_T \to 0, \quad n \to \infty.$$

由定理1.5.8和初等过程的随机积分定义, 可以将随机积分定义式(1.5.35)推广到所有的L_2^0可料过程, 即如下定理成立.

定理 1.5.9 $\varPhi(t):[0,\infty) \to \mathcal{L}_2^0$为可料过程, 如果

$$\int_0^t \|\varPhi Q^{\frac{1}{2}}\|_{\mathrm{HS}}^2 \mathrm{d}s < \infty,$$

则随机积分$\int_0^t \varPhi \mathrm{d}W(s)$定义有意义, 并且有Itô等距性

$$E\left\|\int_0^t \varPhi(s)\mathrm{d}W(s)\right\|^2 = E\int_0^t \|\varPhi(s)\|_{L_2^0}^2 \mathrm{d}s. \tag{1.5.40}$$

在上述随机积分的定义中, 要求Q是U上的一个核算子. 下面把随机积分的定义扩展到U上一般的有界自伴非负算子Q上. 为方便起见, 以下设Q是一个正算子, 即$Qx=0$当且仅当$x=0$. 令$U_0 = Q^{\frac{1}{2}}U$, 其范数为$\|u\|_0 = \|Q^{-\frac{1}{2}}(u)\|, u \in U_0$. 令$U_1$是任意的一个Hilbert空间, 使得$U$连续嵌入到$U_1$, 并且$U_0$到$U_1$的嵌入映射是一个Hilbert-Schmidt算子. 令$g_j = Q^{\frac{1}{2}}e_j$, 其中$j=1,2,\cdots$, 则$\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$构成U_0的一组标准正交基. 设$\{\beta_j\}$是一组独立实值标准Wiener过程, 则有如下结论成立.

定理 1.5.10 公式

$$W(t) = \sum_{j=1}^{\infty} g_j \beta_j(t), \quad t \geqslant 0, \tag{1.5.41}$$

定义了一个U_1-值Q_1-Wiener过程, 使得$\mathrm{Tr}Q_1 < +\infty, \mathrm{Im}Q_1^{\frac{1}{2}} = U_0$, 并且

$$\|u\|_0 = \|Q_1^{-\frac{1}{2}}u\|_1. \tag{1.5.42}$$

对任意的$a \in U$, 过程

$$\langle a, W(t)\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \langle a, g_j\rangle \beta_j(t) \tag{1.5.43}$$

是一个实值Wiener过程, 并且成立

$$E\langle a, W(t)\rangle\langle b, W(s)\rangle = (t \wedge s)\langle Qa, b\rangle, \quad t, s \geqslant 0, a, b \in U. \tag{1.5.44}$$

证明 由于嵌入映射$J: U_0 \to U_1$是Hilbert-Schmidt的, 所以$\sum\limits_{j=1}^{\infty} \|g_j\|_1^2 < +\infty$,

$$E\left\|\sum_{j=1}^{\infty} g_j\beta_j(t)\right\|_1^2 = t\sum_{j=1}^{\infty} \|g_j\|_1^2 < +\infty.$$

因此式(1.5.41)定义的$W(t)$在$L^2(\Omega, \mathcal{F}, P; U_1)$中收敛, 即式(1.5.41)定义了一个$U_1$-值Wiener过程$W(t)$. 因为

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\langle a, g_j\rangle|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\langle a, Q^{\frac{1}{2}}e_j\rangle|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j|\langle a, e_j\rangle|^2 \leqslant \max_j \gamma_j\|a\|^2 < +\infty,$$

所以定义$\langle a, W(t)\rangle$的级数在$L^2((\Omega, \mathcal{F}, P)$中收敛. 设$t \geqslant s \geqslant 0$, 则有

$$\begin{aligned}
& E\langle a, W(t)\rangle\langle b, W(s)\rangle \\
= & E\langle a, W(t)\rangle\langle b, W(s)\rangle \\
= & s\sum_{j=1}^{\infty}\langle a, g_j\rangle\langle b, g_j\rangle \\
= & s\sum_{j=1}^{\infty}\langle Q^{\frac{1}{2}}a, Q^{-\frac{1}{2}}g_j\rangle\langle Q^{\frac{1}{2}}b, Q^{-\frac{1}{2}}g_j\rangle \\
= & s\sum_{j=1}^{\infty}\langle Qa, g_j\rangle_0\langle Qb, g_j\rangle_0 \\
= & s\langle Qa, Qb\rangle_0 = s\langle Q^{\frac{1}{2}}a, Q^{\frac{1}{2}}b\rangle = s\langle Qa, b\rangle.
\end{aligned}$$

注意到由协方差定义,

$$\begin{aligned}
\langle Q_1 a, b\rangle_1 &= E\langle a, W(1)\rangle_1\langle b, W(1)\rangle_1 \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\langle a, g_j\rangle_1\langle b, g_j\rangle_1 \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\langle a, Jg_j\rangle_1\langle b, Jg_j\rangle_1 \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\langle J^*a, g_j\rangle_0\langle J^*b, g_j\rangle_0 \\
&= \langle J^*a, J^*b\rangle_0 = \langle JJ^*a, b\rangle_1,
\end{aligned}$$

所以$Q_1 = JJ^*$. 由于

$$\|Q_1^{\frac{1}{2}}a\|_1^2 = \langle JJ^*a, a\rangle_1 = \|J^*a\|_0^2, \quad a \in U_1. \tag{1.5.45}$$

因此$\mathrm{Im}Q_1^{\frac{1}{2}} = \mathrm{Im}J^* = U_0$, 并且算子$G = Q_1^{-\frac{1}{2}}J$是$U_0$到$U_1$的等距算子. 于是得

$$\|Q_1^{-\frac{1}{2}}u\|_1 = \|Q_1^{-\frac{1}{2}}Ju\|_1 = \|u\|_0.$$

定理得证. ¶

在本节最后不加证明地给出随机积分的一些性质, 详细的证明过程可见参考文献[3].

定理 1.5.11 设Φ是$[0,T]$上L_2^0-值可料过程, $|||\Phi|||_T < +\infty$, 则随机积分$\Phi\cdot W$是一个连续均方可积鞅, 其二次变差为

$$\ll \Phi \cdot W(t) \gg = \int_0^t (\Phi(s)Q^{\frac{1}{2}})(\Phi(s)Q^{\frac{1}{2}})^* \mathrm{d}s. \tag{1.5.46}$$

如果ϕ是一个在$[0,T]$上Bochner可积的、H值可料的过程, $X(0)$是一个$\mathcal{F}_0$可测的H值随机变量, 则下列随机过程有意义,

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \phi(s)\mathrm{d}s + \int_0^t \Phi(s)\mathrm{d}W(s),\ t \in [0,T]. \tag{1.5.47}$$

定理 1.5.12 如果函数$F : [0,T] \times H \longrightarrow \mathbb{R}^1$, 并且其导数$F_t, F_x, F_{xx}$在$[0,T] \times H$的有界子集上一致连续, 则有Itô积分公式

$$\begin{aligned} F(t,X(t)) \quad = \quad & F(0,X(0)) + \int_0^t \langle F_x(s,X(s)), \Phi(s)\mathrm{d}W(s)\rangle \\ & + \int_0^t \Big\{ F_t(s,X(s)) + \langle F_x(s,X(s)), \phi(s)\rangle \\ & + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}[F_{xx}(s,X(s))(\Phi(s)Q^{\frac{1}{2}})(\Phi(s)Q^{\frac{1}{2}})^*] \Big\} \mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{1.5.48}$$

设$(E,\mathcal{B}(E))$是一个可测空间, μ是$(E,\mathcal{G})$上有限测度. 设映射

$$\Phi = \Phi(t,\omega,x) : (\Omega_T \times E, \mathcal{P}_T \times \mathcal{B}(E) \to (L_2^0, \mathcal{B}(L_2^0))$$

是可测的. 则有如下随机Fubini定理:

定理 1.5.13 设Φ满足以上假设, 并且

$$\int_E |||\Phi(\cdot,\cdot,x)|||_T \mu(\mathrm{d}x) < +\infty,$$

则

$$\int_E \left(\int_0^T \Phi(t,x)\mathrm{d}W(t) \right) \mu(\mathrm{d}x) = \int_0^T \left(\int_E \Phi(t,x)\mu(\mathrm{d}x) \right) \mathrm{d}W(t).$$

第2章　随机抛物方程有限元方法

抛物型方程是一类重要的偏微分方程, 它可以用来描述一个区域内温度随时间的变化以及流动系统质量的传递规律. 本章以自伴算子和非自伴算子随机抛物方程为例, 介绍随机抛物型方程有限元理论分析方法. 对于自伴算子随机抛物方程, 首先基于半群理论给出方程的温和解, 研究其温和解的正则性, 然后分别给出随机抛物方程的半离散和全离散有限元格式. 利用确定性抛物方程的有限元误差估计, 给出随机抛物方程半离散和全离散有限元格式误差估计的分析方法. 对于非自伴算子随机抛物方程, 通过建立非自伴算子与自伴算子所定义范数之间的一种等价关系, 将非自伴算子抛物方程的有限元估计转化成自伴算子抛物方程的有限元分析, 进而得到非自伴算子随机抛物方程的有限元误差估计.

2.1　抛物方程有限元方法理论分析

确定性抛物方程有限元理论分析有许多重要的成果, 例如文献[10]. 由于随机抛物方程的正则性比较差, 这些关于确定性抛物方程有限元方法的研究结果不能直接应用到随机抛物方程的有限元误差估计中, 所以本节对确定性抛物方程的有限元误差估计做了一些推广, 以使得这些推广能够应用于随机抛物方程有限元理论分析中. 本节内容主要选自文献[13, 14]. 下面将通过能量估计方法证明有限元近似解的误差估计.

考虑抛物方程的初边值问题

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t)+Au(t)=0, 0<t\leqslant T, u(0)=u_0 \tag{2.1.1}$$

的半离散格式和全离散格式的误差估计, 其中A是线性、自伴、正定且具有紧逆的不必有界的算子, $D(A)\subset H, \mathcal{D}$是有界凸区域. 为了方便起见, 不妨设$A=-\Delta$.

2.1.1　空间半离散格式的误差估计

设$S_h\subset H_0^1$是有限元空间, 方程(2.1.1)的半离散形式为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_h(t)+A_hu_h(t)=0, 0<t\leqslant T, u_h(0)=P_hu_0, \tag{2.1.2}$$

其中A_h是$A=-\Delta$的离散算子, 定义为

$$(A_h\psi,\chi)=(\nabla\psi,\nabla\chi),\ \ \forall\psi,\chi\in S_h.$$

记$E_h(t)=\mathrm{e}^{-tA_h}, E(t)=\mathrm{e}^{-tA}$分别为算子$A$和$A_h$生成的半群. 在证明空间半离散格式(2.1.2)的误差估计之前, 先给出半群$E(t)$的一些性质.

引理 2.1.1 设$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, 且$l\in Z^+$, 则有

$$|D_t^lE(t)v|_\beta\leqslant ct^{-\frac{\beta-\alpha}{2}-l}|v|_\alpha,\ \ t>0,\ \ 2l+\beta\geqslant\alpha, \tag{2.1.3}$$

$$\int_0^t s^\alpha |D_t^l E(s)v|_\beta^2 \mathrm{d}s \leqslant c|v|_{2l+\beta-\alpha-1}^2,\ \ t>0,\ \ \alpha \geqslant 0, \tag{2.1.4}$$

其中D_t^l表示对时间t求l阶偏导数.

证明 在此只对式(2.1.3)进行证明, 式(2.1.4)显然成立. 设$\{\lambda_m, \phi_m\}$是$-\Delta$的特征对, 记

$$C = \sup_{\tau>0}(\tau^{\beta-\alpha+2l}\mathrm{e}^{-2\tau}).$$

则

$$\begin{aligned} |D_t^l E(t)v|_\beta^2 &= |(-\Delta)^l E(t)v|_\beta^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^{\beta+2l}\mathrm{e}^{-2\lambda_m t}(v,\phi_m)^2 \\ &\leqslant Ct^{-(\beta-\alpha)-2l}\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m^\alpha (v,\phi_m)^2 = Ct^{-(\beta-\alpha)-2l}|v|_\alpha^2. \end{aligned}$$

证毕. ¶

引理 2.1.2 对$\forall \alpha \geqslant 0, 0 \leqslant \beta \leqslant 1$, 有

$$\| A^\alpha E(t) \| \leqslant ct^{-\alpha},\ \ t>0, \tag{2.1.5}$$

$$\| A^{-\beta}(I-E(t)) \| \leqslant ct^\beta,\ \ t>0. \tag{2.1.6}$$

证明 由式(2.1.3)得

$$\|A^\alpha E(t)x\| = \|E(t)x\|_{2\alpha} \leqslant ct^{-\alpha}\|x\|.$$

利用范数定义, 证毕. ¶

下面给出椭圆问题解算子的定义. 对任给$f \in L^2(\mathcal{D})$, 定义$u = Gf$为下述椭圆问题的解:

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in \mathcal{D}, \\ u = 0, & x \in \partial\mathcal{D}, \end{cases} \tag{2.1.7}$$

其中$\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d (d=1,2,3)$是有界凸区域, 算子$G: L^2(\mathcal{D}) \to H_0^1(\mathcal{D})$.

式(2.1.7)的离散问题是求$u_h \in S_h$, 使得:

$$(\nabla u_h, \nabla \chi) = \langle f, \chi \rangle,\ \ \forall \chi \in S_h. \tag{2.1.8}$$

由椭圆方程的正则性理论知

$$|u|_1 \leqslant C|f|_{-1},\ \ \forall f \in \dot{H}^{-1}. \tag{2.1.9}$$

其标准的误差估计为

$$\|u_h - u\| \leqslant Ch^s|u|_s,\ \ s=1,2. \tag{2.1.10}$$

引入椭圆映射$R_h: H_0^1 \to S_h$,

$$(\nabla R_h v, \nabla \chi) = (\nabla v, \nabla \chi), \quad \forall v \in H_0^1.$$

由式(2.1.10)可得

$$\|R_h v - v\| \leqslant Ch^s |v|_s, \quad s = 1, 2.$$

令$G_h = R_h G$, 由式(2.1.8)和椭圆方程正则估计, 有

$$\|(G_h - G)f\| = \|(R_h - I)Gf\| \leqslant Ch^s |Gf|_s = Ch^s |f|_{s-2}, \quad s = 1, 2. \tag{2.1.11}$$

令$\rho(t) = R_h u(t) - u(t), e(t) = u_h(t) - u(t) = F_h v$, 下面讨论有限元半离散近似方法(2.1.2)与原问题(2.1.1)之间的误差估计, 其中的估计是以$\rho(t)$的形式给出的.

引理 2.1.3 假设G_h是L^2上的半正定算子, 且满足

$$G_h e_t + e = \rho, \quad t \geqslant 0, \quad G_h e(0) = 0. \tag{2.1.12}$$

则

$$\|e(t)\|^2 \leqslant C\left(\|\rho(t)\|^2 + \frac{1}{t}\int_0^t (\|\rho\|^2 + s^2\|\rho_t\|^2)\mathrm{d}s\right), \quad t > 0.$$

证明 在式(2.1.12)两端分别与$2e_t$做内积, 得

$$2(G_h e_t, e_t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|e\|^2 = 2(\rho, e_t),$$

由于G_h半正定, 故有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|e\|^2 \leqslant 2(\rho, e_t) = 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho, e) - 2(\rho_t, e).$$

上式同乘以t, 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t\|e\|^2) \leqslant 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t(\rho, e)) - 2t(\rho_t, e) + \|e\|^2 - 2(\rho, e),$$

然后积分,

$$t\|e(t)\|^2 \leqslant 2t\|\rho(t)\|\|e(t)\| + \int_0^t (\|e\|^2 + 2\|\rho\|\|e\| + 2s\|\rho_t\|\|e\|)\mathrm{d}s,$$

即

$$\|e(t)\|^2 \leqslant C(\|\rho(t)\|^2 + \frac{1}{t}\int_0^t (\|e\|^2 + \|\rho\|^2 + s^2\|\rho_t\|^2)\mathrm{d}s.$$

由$\int_0^t \|e\|^2\mathrm{d}s \leqslant \int_0^t \|\rho\|^2\mathrm{d}s$, 即得引理证明. ¶

引入投影算子$P_h: \dot{H}^{-1} \to S_h$,

$$(P_h f, \chi) = (f, \chi), \quad \forall f \in \dot{H}^{-1}, \chi \in S_h.$$

由此定义,

$$(A_h R_h v, \chi) = (\nabla R_h v, \nabla \chi) = (\nabla v, \nabla \chi) = -(\Delta v, \chi) = (-P_h \Delta v, \chi), \quad \forall \chi \in S_h,$$

因此投影算子P_h, 离散Laplace算子A_h以及椭圆映射R_h之间有关系

$$A_h R_h = -P_h \Delta.$$

基于引理2.1.3, 下面给出有限元半离散近似方法(2.1.2)的误差估计.

定理 2.1.1 设$F_h(t) = E_h(t)P_h - E(t)$, 则

$$\|F_h v\|_{L_\infty([0,T];H)} \leqslant Ch^\beta |v|_\beta, \ \ v \in \dot{H}^\beta, \ \ 0 \leqslant \beta \leqslant 1, \tag{2.1.13}$$

且

$$\|F_h v\|_{L_2([0,T];H)} \leqslant Ch^\beta |v|_{\beta-1}, \ \ v \in \dot{H}^{\beta-1}, \ \ 0 \leqslant \beta \leqslant 1. \tag{2.1.14}$$

此外, 在更弱的范数下有

$$\|F_h v\|_{L_\infty([0,T];\dot{H}^{-1})} \leqslant Ch^\beta |v|_{\beta-1}, \ \ v \in \dot{H}^{\beta-1}, \ \ 1 \leqslant \beta \leqslant 2, \tag{2.1.15}$$

且有

$$\|F_h v\|_{L_2([0,T];\dot{H}^{-1})} \leqslant Ch^\beta \ell_h |v|_{\beta-2}, \ v \in \dot{H}^{\beta-2}, 1 \leqslant \beta \leqslant 2, \tag{2.1.16}$$

其中$\ell_h = \log(T/h^2)$.

证明 记$u(t) = E(t)v, u_h(t) = E_h(t)P_h v, e(t) = u_h(t) - u(t) = F_h v$. 首先证明式(2.1.13). 由$P_h$, $E_h(t)$和$E(t)$的稳定性, 得

$$\|e(t)\| = \|E_h(t)P_h v - E(t)v\| \leqslant 2\|v\|, \ t \geqslant 0, v \in H. \tag{2.1.17}$$

如果

$$\|e(t)\| \leqslant Ch|v|_1, \ t \geqslant 0, v \in \dot{H}^1. \tag{2.1.18}$$

则应用内插理论定理1.2.12即得式(2.1.13).

为了证明式(2.1.18), 首先考虑误差方程

$$G_h e_t + e = \rho, \tag{2.1.19}$$

其中$\rho = -(G_h - G)u_t$. 注意到$G_h e(0) = 0$, 因为

$$(G_h e(0), \omega) = (P_h v - v, G_h \omega) = 0, \ \omega \in H, \tag{2.1.20}$$

其中$G_h \omega \in S_h$. 则由引理2.1.3知,

$$\|e(t)\| \leqslant C \sup_{s \leqslant t}(s\|\rho_t(s)\| + \|\rho(s)\|), \ t \geqslant 0.$$

显然由式(2.1.11)和引理2.1.1有

$$\|\rho(s)\| = \|(G_h - G)u_t\| \leqslant Ch|u_t|_{-1} \leqslant Ch|v|_1,$$

且

$$s\|\rho_t(s)\| \leqslant Chs|u_t(s)|_1 \leqslant Ch|v|_1.$$

因此式(2.1.18)成立, 从而式(2.1.13)得证.

下面证明式(2.1.14). 由内插理论定理1.2.12, 只需证明

$$\|e\|_{L_2([0,T];H)} \leqslant C|v|_{-1} \tag{2.1.21}$$

和

$$\|e\|_{L_2([0,T];H)} \leqslant Ch\|v\| \tag{2.1.22}$$

成立即可.

在式(2.1.19)等式两边和e做内积, 则有

$$(G_h e_t, e) + (e, e) = (\rho, e).$$

关于时间t积分, 注意到$G_h e(0) = 0$且应用不等式$(\rho, e) \leqslant \frac{1}{2}(\| \rho \|^2 + \| e \|^2)$, 则有

$$(G_h e(T), e(T)) + \int_0^T \|e\|^2 \mathrm{d}t \leqslant \int_0^T \|\rho\|^2 \mathrm{d}t. \tag{2.1.23}$$

显然, 由式(2.1.11)和引理2.1.1得

$$\int_0^T \|\rho\|^2 \mathrm{d}t \leqslant \int_0^T \|(G_h - G)u_t\|^2 \mathrm{d}t \leqslant Ch^2 \int_0^T |u|_1^2 \mathrm{d}t \leqslant Ch^2\|v\|^2, \tag{2.1.24}$$

所以式(2.1.22)成立.

为了证明式(2.1.21), 由引理2.1.1和相应的离散部分, 有

$$\int_0^T \|e\|^2 \mathrm{d}t \leqslant 2\int_0^T (\|u_h\|^2 + \|u\|^2)\mathrm{d}t \leqslant 2|v|_{-1,h}^2 + 2|v|_{-1}^2, \tag{2.1.25}$$

其中$|v|_{-1,h}$为半离散范数, 且定义为

$$|v|_{-1,h} = (G_h v, v)^{\frac{1}{2}} = \|G_h^{\frac{1}{2}} v\|.$$

因为$|v|_{-1} = \sup\{(v,\omega)/|\omega|_1 :\ \omega \in \dot{H}^1\}$, 取$\omega = G_h v$, 其中$v \in \dot{H}^{-1}$.

$$|v|_{-1} = \sup_{\omega \in \dot{H}^1} \frac{(v,\omega)}{|\omega|_1} \geqslant \frac{(v, G_h v)}{|G_h v|_1} = \frac{(v, G_h v)}{(v, G_h v)^{1/2}} = |v|_{-1,h}, \tag{2.1.26}$$

因为

$$|G_h v|_1^2 = (AG_h v, G_h v) = A(G_h v, G_h v) = (A_h G_h v, G_h v) = (v, G_h v), \tag{2.1.27}$$

其中$A_h = G_h^{-1}$. 由式(2.1.25)得到$\int_0^T \|e\|^2 \mathrm{d}t \leqslant 4|v|_{-1}^2$, 因此式(2.1.21)成立.

为证式(2.1.15), 只需证

$$|e(t)|_{-1} \leqslant Ch\|v\| \tag{2.1.28}$$

和

$$|e(t)|_{-1} \leqslant Ch^2|v|_1 \tag{2.1.29}$$

成立即可.

由式(2.1.23)和式(2.1.24), 有

$$(G_he, e) = |e|_{-1,h}^2 \leqslant Ch^2\|v\|^2. \tag{2.1.30}$$

由式(2.1.18)有

$$|e|_{-1}^2 = (G_he, e) + ((G - G_h)e, e) \leqslant |e|_{-1,h}^2 + Ch^2\|e\|^2,$$

所以有

$$|e|_{-1} \leqslant |e|_{-1,h} + Ch\|e\|. \tag{2.1.31}$$

而由式(2.1.17)得

$$|e|_{-1} \leqslant |e|_{-1,h} + Ch\|e\| \leqslant Ch\|v\|,$$

所以式(2.1.28)得证.

由式(2.1.23)和式(2.1.11)得到

$$|e(t)|_{-1,h}^2 = (G_he(t), e(t)) \leqslant \frac{1}{2}\int_0^t \|\rho\|^2 \mathrm{d}s \leqslant Ch^4\int_0^t \|u_t|^2\mathrm{d}s \leqslant Ch^4|v|_1^2.$$

结合式(2.1.18)和式(2.1.31), 式(2.1.29)得证.

下证式(2.1.16). 对式(2.1.19)关于时间t积分, 记$\widetilde{e}(t) = \int_0^t e(s)\mathrm{d}s, \widetilde{\rho}(t) = \int_0^t \rho(s)\mathrm{d}s$, 有

$$G_he + \tilde{e} = \tilde{\rho},\ \tilde{e}(0) = 0. \tag{2.1.32}$$

在式(2.1.32)两边关于e做内积, 因为$e = \widetilde{e}_t$, 得到

$$(G_he, e) + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\tilde{e}\|^2 = (\tilde{\rho}, e) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tilde{\rho}, \tilde{e}) - (\rho, \tilde{e}),$$

然后积分, 注意到$\widetilde{e}(0) = 0$, 有

$$\begin{aligned}\int_0^T |e|_{-1,h}^2\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\|\tilde{e}(T)\|^2 &= \int_0^T (\tilde{\rho}, e)\mathrm{d}s = [(\tilde{\rho}, \tilde{e})]_0^T - \int_0^T (\rho, \tilde{e})\mathrm{d}s \\ &\leqslant \|\tilde{\rho}(T)\|\|\tilde{e}(T)\| + (\int_0^T \|\rho\|\mathrm{d}s) \sup_{0\leqslant s\leqslant T}\|\tilde{e}(s)\| \\ &\leqslant 2(\int_0^T \|\rho\|\mathrm{d}s) \sup_{0\leqslant s\leqslant T}\|\tilde{e}(s)\|.\end{aligned}$$

从而

$$\int_0^T |e|_{-1,h}^2 \mathrm{d}s \leqslant C(\int_0^T \|\rho\|\mathrm{d}s)^2.$$

注意到

$$\begin{aligned}\int_0^T \|\rho\|\mathrm{d}s &= \int_0^{h^2} \|\rho\|\mathrm{d}s + \int_{h^2}^T \|\rho\|\mathrm{d}s \\ &\leqslant C\int_0^{h^2} s^{-1/2}|v|_{-1}\mathrm{d}s + C\int_{h^2}^T h|u|_1\mathrm{d}s \leqslant Ch\ell_h|v|_{-1},\end{aligned}$$

类似地

$$\begin{aligned}\int_0^T \|\rho\|\mathrm{d}s &= \int_0^{h^2} \|\rho\|\mathrm{d}s + \int_{h^2}^T \|\rho\|\mathrm{d}s \\ &\leqslant Ch^2\|v\| + Ch^2\int_{h^2}^T |u|_2\mathrm{d}s \\ &\leqslant Ch^2\|v\| + Ch^2\log(T/h^2)\|v\| \leqslant Ch^2\ell_h\|v\|,\end{aligned}$$

因此得到

$$\int_0^T |e|_{-1,h}^2 \mathrm{d}s \leqslant Ch^2\ell_h^2|v|_{-1}^2, \tag{2.1.33}$$

和

$$\int_0^T |e|_{-1,h}^2 \mathrm{d}s \leqslant Ch^4\ell_h^2\|v\|^2. \tag{2.1.34}$$

由式(2.1.27), 式(2.1.31)和式(2.1.33), 得到

$$\begin{aligned}\int_0^T |e|_{-1}^2\mathrm{d}s &\leqslant C\int_0^T |e|_{-1,h}^2\mathrm{d}s + Ch^2\int_0^T \|e\|^2\mathrm{d}s \\ &\leqslant Ch^2\ell_h^2|v|_{-1}^2 + Ch^2|v|_{-1}^2 \leqslant Ch^2\ell_h^2|v|_{-1}^2.\end{aligned}$$

由式(2.1.34)得到

$$\int_0^T |e|_{-1}^2\mathrm{d}s \leqslant Ch^4\ell_h^2\|v\|^2 + Ch^4\|v\|^2 \leqslant Ch^4\ell_h^2\|v\|^2.$$

根据内插理论定理1.2.12, 式(2.1.16)得证. 证毕. ¶

2.1.2 全离散格式的有限元误差估计

本节采用向后Euler方法得到全离散格式的有限元误差估计. 设k为时间步长, $t_n = nk$, 其中n是非负整数. 记$U^n = U_h^n$表示$u(t_n)$的近似解. 方程(2.1.1)的向后Euler格式为

$$\frac{U^n - U^{n-1}}{k} + A_hU^n = 0, \quad n \geqslant 1, \quad U^0 = P_hu_0. \tag{2.1.35}$$

记$r(\lambda)=\frac{1}{1+\lambda}$, 则式(2.1.35)可写为

$$U^n=r(kA_h)U^{n-1},\ \ n\geqslant 1,\ \ U^0=P_hu_0. \tag{2.1.36}$$

记$E_{kh}=r(kA_h)$, $E(t_n)=\mathrm{e}^{-t_nA}$, 则$U^n=E_{kh}^nu_0, u(t_n)=E(t_n)u_0$. 下面给出有限元全离散格式(2.1.35)的误差估计, 即U^n与$u(t_n)$之间的误差估计.

定理 2.1.2 设$F_n=E_{kh}^nP_h-E(t_n)$, 则有

$$\|F_nv\|\leqslant C(k^{\beta/2}+h^\beta)|v|_\beta,\ \ v\in\dot{H}^\beta,\ 0\leqslant\beta\leqslant 1, \tag{2.1.37}$$

且

$$(k\sum_{j=1}^n\|F_jv\|^2)^{1/2}\leqslant C(k^{\beta/2}+h^\beta)|v|_{\beta-1},\ \ v\in\dot{H}^{\beta-1},\ 0\leqslant\beta\leqslant 1. \tag{2.1.38}$$

此外, 在更弱的范数下有

$$\|F_nv\|_{-1}\leqslant C(k^{\beta/2}+h^\beta)|v|_{\beta-1},\ \ v\in\dot{H}^{\beta-1},\ 1\leqslant\beta\leqslant 2, \tag{2.1.39}$$

且

$$(k\sum_{j=1}^n|F_jv|_{-1}^2)^{1/2}\leqslant C(k^{\beta/2}+h^\beta)\ell_k|v|_{\beta-2},\ \ v\in\dot{H}^{\beta-2},\ 1\leqslant\beta\leqslant 2, \tag{2.1.40}$$

其中$\ell_k=\log(\frac{T}{k}),T=T_n$.

证明 下面只详细地证明式(2.1.38), 其他的证明类似. 定义$u(t_n)=u^n=E(t_n)v,U^n=E_{kh}^nP_hv$, 由内插理论定理1.2.12, 只需证明

$$(k\sum_{j=1}^n\|F_jv\|^2)^{1/2}\leqslant C|v|_{-1} \tag{2.1.41}$$

和

$$(k\sum_{j=1}^n\|F_jv\|^2)^{1/2}\leqslant C(k^{1/2}+h)\|v\| \tag{2.1.42}$$

成立即可.

令$\partial_te^n=(e^n-e^{n-1})/k$, 则有如下的误差方程

$$G_h\partial_te^n+e^n=\rho^n+G_h\tau^n, \tag{2.1.43}$$

其中$\rho^n=(G_h-G)u_t(t_n),\tau^n=u_t(t_n)-\partial_tu^n$.

在方程(2.1.43)两边同时和e^n做内积, 有

$$(G_h\partial_te^n,e^n)+(e^n,e^n)=(\rho^n,e^n)+(G_h\tau^n,e^n).$$

对n求和, 利用不等式$(\rho^n, e^n) \leqslant \frac{1}{2}(\| \rho^n \|^2 + \| e^n \|^2)$, 且注意到$G_h e^0 = 0$, 有

$$(G_h e_n, e_n) + k\sum_{j=1}^{n}\|e_j\|^2 \leqslant Ck\sum_{j=1}^{n}\|\rho^j\|^2 + Ck\sum_{j=1}^{n}\|G\tau^j\|^2 + Ck\sum_{j=1}^{n}\|(G_h - G)\tau^j\|^2.$$

因为$\rho^j = \rho(s) + \int_s^{t_j}\rho_t(\tau)\mathrm{d}\tau$, 由引理2.1.1有

$$\begin{aligned}
& k\sum_{j=1}^{n}\|\rho^j\|^2 = k\|\rho\|^2 + \sum_{j=2}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\|\rho^j\|^2\mathrm{d}s \\
\leqslant\ & k\|\rho\|^2 + 2\sum_{j=2}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(\|\rho(s)\|^2 + \|\int_s^{t_j}\rho_t(\tau)\mathrm{d}\tau\|^2)\mathrm{d}s \\
\leqslant\ & k\|\rho\|^2 + 2\int_{t_1}^{t_n}\|\rho(s)\|^2\mathrm{d}s + 2\sum_{j=2}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}((t_j - s)\int_s^{t_j}\|\rho_t(\tau)\|^2\mathrm{d}\tau)\mathrm{d}s \\
\leqslant\ & k\|\rho\|^2 + 2\int_{t_1}^{t_n}\|\rho(s)\|^2\mathrm{d}s + 2k\sum_{j=2}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\tau\|\rho_t(\tau)\|^2\mathrm{d}\tau \\
\leqslant\ & Ck\|u\|^2 + Ch^2\int_0^{t_n}|u(s)|_1^2\mathrm{d}s + Ck\int_0^{t_n}\tau\|u_t(\tau)\|^2\mathrm{d}\tau \leqslant C(k+h^2)\|v\|^2. \qquad (2.1.44)
\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}
& k\sum_{j=1}^{n}\|(G_h - G)\tau^j\|^2 \leqslant Ckh^2|\tau^1|_{-1}^2 + Ckh^2\sum_{j=2}^{n}|\tau^j|_{-1}^2 \\
=\ & Ckh^2\left|u_t(k) - \frac{1}{k}\int_0^k u_t(\tau)\mathrm{d}\tau\right|_{-1}^2 + Ckh^2\sum_{j=2}^{n}\left|\frac{1}{k}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(s - t_{j-1})u_{tt}(s)\mathrm{d}s\right|_{-1}^2 \\
\leqslant\ & Ch^2\|v\|^2 + Ch^2\sum_{j=2}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}k(s - t_{j-1})|u_{tt}(s)|_{-1}^2\mathrm{d}s \\
\leqslant\ & Ch^2\|v\|^2 + Ch^2\sum_{j=2}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}s^2|u_{tt}(s)|_{-1}^2\mathrm{d}s \leqslant Ch^2\|v\|^2,
\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}
k\sum_{j=1}^{n}\|G\tau^j\|^2 &= k\sum_{j=1}^{n}\|\frac{1}{k}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(s - t_{j-1})u_t(s)\mathrm{d}s\|^2 \\
&\leqslant k\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(s - t_{j-1})\|u_t(s)\|^2\mathrm{d}s \leqslant Ck\int_0^{t_n}s\|u_t(s)\|^2\mathrm{d}s \leqslant k\|v\|^2,
\end{aligned}$$

因此得到

$$(G_h e^n, e^n)^{1/2} + (k\sum_{j=1}^{n}\|e^j\|^2)^{1/2} \leqslant C(k^{1/2} + h)\|v\|, \qquad (2.1.45)$$

式(2.1.42)得证. ¶

2.2 自伴算子随机抛物方程有限元方法

本节通过半群理论得到随机抛物方程温和解的表达式, 利用有限元近似得到随机抛物方程的半离散和全离散格式, 应用Itô等距性把随机积分问题转化为一般积分问题, 从而推导出误差表达式.

2.2.1 空间半离散格式的误差估计

Y. Yan[13]首先开始了随机微分方程有限元方法的研究工作, 本节详细介绍Y. Yan的研究成果. 考虑Hilbert空间中线性随机抛物方程

$$\mathrm{d}u + Au\mathrm{d}t = \mathrm{d}W,\ \ 0 \leqslant t \leqslant T,\ \ u(0) = u_0, \tag{2.2.1}$$

其中$u(t)$是H-值随机过程, $u_0 \in H$. A是线性、自伴且具有紧逆的不必有界的算子, A的定义域$D(A)$是H的稠密子空间, $W(t)$是定义在概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, P)$上的Wiener过程, 其协方差算子为Q. 为了方便起见, 不妨设$A = -\Delta$. 设$E(t) = \mathrm{e}^{-tA}$, 则由半群理论, 式(2.2.1)有唯一的温和解

$$u(t) = E(t)u_0 + \int_0^t E(t-s)\mathrm{d}W(s),\ \ 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{2.2.2}$$

相应于式(2.2.1)的半离散问题即为求$u_h(t) = u_h(\cdot, t) \in S_h$, 使得

$$\mathrm{d}u_h + A_h u_h \mathrm{d}t = P_h \mathrm{d}W,\ \ 0 \leqslant t \leqslant T,\ \ u_h(0) = P_h u_0 \tag{2.2.3}$$

成立. 设$E_h(t) = \mathrm{e}^{-tA_h}$, 则同样由半群理论, 式(2.2.3)有唯一的温和解

$$u_h(t) = E_h(t)P_h u_0 + \int_0^t E_h(t-s)P_h \mathrm{d}W(s),\ \ 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{2.2.4}$$

为了给出有限元半离散格式(2.2.3)的误差估计, 先考虑方程(2.2.1)的温和解(2.2.2)的正则性.

定理 2.2.1 设$u(t)$是式(2.2.1)的温和解, $\beta \in [0,1]$, 若$\|A^{(\beta-1)/2}\|_{L_2^0} < \infty$, 则对$t \in [0,T]$并且$u_0 \in L_2(\Omega; \dot{H}^\beta)$, 有

$$\| u(t) \|_{L_2(\Omega;\dot{H}^\beta)} \leqslant C(\| u_0 \|_{L_2(\Omega;\dot{H}^\beta)} + \| A^{(\beta-1)/2} \|_{L_2^0}). \tag{2.2.5}$$

特殊地, 若$W(t)$是具有协方差算子Q的H-值Wiener过程, $\mathrm{Tr}(Q) < \infty$, 则有

$$\| u(t) \|_{L_2(\Omega;\dot{H}^1)} \leqslant C(\| u_0 \|_{L_2(\Omega;\dot{H}^1)} + \mathrm{Tr}(Q)^{\frac{1}{2}}). \tag{2.2.6}$$

证明 由式(2.2.2), 对$\beta \geqslant 0$, 利用$E(t)$的稳定性质和Itô等距性, 有

$$\begin{aligned} E(|u(t)|_\beta^2) &\leqslant 2E(|E(t)u_0|_\beta^2) + 2E \left\| \int_0^t A^{\frac{\beta}{2}} E(t-s)\mathrm{d}W(s) \right\|^2 \\ &\leqslant 2E(|u_0|_\beta^2) + 2E\int_0^t \| A^{\frac{\beta}{2}} E(t-s) \|_{L_2^0}^2 \,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

设$\{e_l\}_{l=1}^{\infty}$是H上的任一正交基, 利用引理2.1.1,

$$\begin{aligned}\int_0^t \| A^{\frac{\beta}{2}}E(t-s) \|_{L_2^0}^2 \,\mathrm{d}s &= \sum_{j=1}^{\infty}\int_0^t \| A^{\frac{\beta}{2}}E(t-s)Q^{\frac{1}{2}}e_j \|^2 \,\mathrm{d}s \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\int_0^t |E(s)Q^{\frac{1}{2}}e_j|_{\beta}^2\mathrm{d}s \\ &\leqslant c\sum_{j=1}^{\infty}|Q^{\frac{1}{2}}e_j|_{\beta-1}^2 \\ &= c\| A^{(\beta-1)/2} \|_{L_2^0}^2 .\end{aligned}$$

由此得式(2.2.5)的证明.

特殊地, 若$W(t)$是H-值Wiener过程, $\mathrm{Tr}(Q)<\infty$. 取$\beta=1$, 因为

$$\| I \|_{L_2^0}^2=\sum_{j=1}^{\infty}\| Q^{\frac{1}{2}}e_j \|^2=\sum_{j=1}^{\infty}\gamma_j=\mathrm{Tr}(Q),$$

所以结论得证. ¶

若定理2.2.1中的区域$\mathcal{D}\subset\mathbb{R}^1$, Q-Wiener过程W是一个柱Wiener过程, 即$Q=I$是一个恒等算子, 则有如下推论.

推论 2.2.1 设$u(t)$是式(2.2.1)的解, 算子$A=-\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, 其定义域$D(A)=H_0^1(0,1)\cap H^2(0,1)$. 若$W(t)$是柱Wiener过程, $u_0\in L_2(\Omega;\dot{H}^{\beta})$, 则对$\beta\in[0,\frac{1}{2})$, 有

$$\| u(t) \|_{L_2(\Omega;\dot{H}^{\beta})}\leqslant C(1+\| u_0 \|_{L_2(\Omega;\dot{H}^{\beta})}).$$

证明 显然A的特征值为$\lambda_j=j^2\pi^2, j=1,2,\cdots$, 其相应的特征函数$\{\phi_j=\sqrt{2}\sin j\pi x\}$在空间$H=L_2(0,1)$上形成一个正交基, 因而有

$$\| A^{(\beta-1)/2} \|_{L_2^0}^2=\sum_{j=1}^{\infty}\| A^{(\beta-1)/2}\phi_j \|^2=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^{\beta-1}.$$

当$\beta\in[0,\frac{1}{2})$时, 显然上式收敛. ¶

我们注意到在定理2.2.1中, 需要条件$\| A^{(\beta-1)/2} \|_{L_2^0}<\infty$, 其中$\beta\in[0,1]$. 下面引理说明此条件与$W(t)$是$\dot{H}^{\beta-1}$值Wiener过程等价.

引理 2.2.1 设$W(t)$是具有协方差算子Q的Wiener过程, 假设A和Q具有相同的特征向量, 则存在算子$\widetilde{Q}$满足$\mathrm{Tr}(\widetilde{Q})<\infty$, 使得下式成立.

(1) 若$\| A^{(\beta-1)/2} \|_{L_2^0}<\infty, \beta\in[0,1]$, 则

$$W(t)=\sum_{l=1}^{\infty}Q^{\frac{1}{2}}e_l\beta_l(t),\quad t\geqslant 0$$

定义了一个$\dot{H}^{\beta-1}$值Wiener过程, 其协方差算子为$\widetilde{Q}$. 特殊地, 若$\mathrm{Tr}(Q)<\infty$, 则$\widetilde{Q}=Q$.

(2) 若$W(t)=\sum\limits_{l=1}^{\infty}Q^{\frac{1}{2}}e_l\beta_l(t),t\geqslant 0$是$\dot{H}^{\beta-1}$值Wiener过程, 其协方差算子为$\widetilde{Q}$, 则

$$\| A^{(\beta-1)/2} \|_{L_2^0}<\infty,\ \ \beta\in[0,1].$$

证明 首先证明(1). 设$\{r_l,e_l\}_{l=1}^{\infty}$是$Q$的特征值和特征向量, 则$\{g_l=Q^{\frac{1}{2}}e_l=r_l^{\frac{1}{2}}e_l\}$是空间$Q^{\frac{1}{2}}(H)$的正交基. 事实上, $(g_l,g_k)_{Q^{\frac{1}{2}}(H)}=(Q^{-\frac{1}{2}}g_l,Q^{-\frac{1}{2}}g_k)=(e_l,e_k)=\delta_{lk}$. 注意到

$$\sum_{l=1}^{\infty}|g_l|_{\beta-1}^2=\sum_{l=1}^{\infty}\| A^{(\beta-1)/2}Q^{\frac{1}{2}}e_l \|^2=\| A^{(\beta-1)/2} \|_{L_2^0}^2<\infty,$$

这意味着$Q^{\frac{1}{2}}(H)$到$\dot{H}^{\beta-1}$的嵌入是HS算子. 则$W(t)$定义了$\dot{H}^{\beta-1}$值Wiener过程, 其协方差算子为$\widetilde{Q}$, 并且$\mathrm{Tr}(\widetilde{Q})<\infty$, 显然若$\mathrm{Tr}(Q)<\infty$, 则$\widetilde{Q}=Q$.

下面证明(2). 因为$W(t)=\sum\limits_{l=1}^{\infty}Q^{\frac{1}{2}}e_l\beta_l(t),t\geqslant 0$是$\dot{H}^{\beta-1}$值Wiener过程, 其协方差算子为$\widetilde{Q},\mathrm{Tr}(\widetilde{Q})<\infty$, 有$E|W(t)|_{\beta-1}^2<\infty$. 设$\{r_l,e_l\}_{l=1}^{\infty}$是$A$的特征值和特征向量, 有

$$E|W(t)|_{\beta-1}^2=E|\sum_{l=1}^{\infty}Q^{\frac{1}{2}}e_l\beta_l(t)|_{\beta-1}^2=E\sum_{l=1}^{\infty}\lambda_l^{\beta-1}r_l\beta_l^2(t)=t\| A^{(\beta-1)/2} \|_{L_2^0}^2.$$

若$W(t)$是$\dot{H}^{\beta-1}$值Wiener过程, 则有$\|A^{(\beta-1)/2}\|_{L_2^0}<\infty,\beta\in[0,1]$. 证毕. ¶

通过以上分析, 下面给出随机抛物方程有限元半离散格式(2.2.3)在范数$\|\cdot\|$和$\|\cdot\|_{-1}$下的误差估计, 并且两种误差估计都是最优的.

定理 2.2.2 设u_h和u分别是式(2.2.3)和式(2.2.1)的解, 假设$\|A^{(\beta-1)/2}\|_{L_2^0}<\infty,\beta\in[0,1]$, 则对$t\geqslant 0,u_0\in L_2(\Omega;\dot{H}^{\beta})$, 有

$$\|u_h(t)-u(t)\|_{L_2(\Omega;H)}\leqslant Ch^{\beta}(\|u_0\|_{L_2(\Omega;\dot{H}^{\beta})}+\| A^{(\beta-1)/2} \|_{L_2^0}). \tag{2.2.7}$$

特殊地, 若$W(t)$是H-值Wiener过程, $\mathrm{Tr}(Q)<\infty$, 则对$t\geqslant 0,u_0\in L_2(\Omega;\dot{H}^1)$, 有

$$\|u_h(t)-u(t)\|_{L_2(\Omega;H)}\leqslant Ch(\|u_0\|_{L_2(\Omega;\dot{H}^1)}+\mathrm{Tr}(Q)^{\frac{1}{2}}). \tag{2.2.8}$$

证明 记$E(t)=\mathrm{e}^{-tA}$, 则有

$$u(t)=E(t)u_0+\int_0^t E(t-s)\mathrm{d}W(s).$$

记$E_h(t)=\mathrm{e}^{-tA_h}$, 则

$$u_h(t)=E_h(t)P_hu_0+\int_0^t E_h(t-s)P_h\mathrm{d}W(s).$$

记$e(t)=u_h(t)-u(t),F_h(t)=E_h(t)P_h-E(t)$, 则

$$\begin{aligned} e(t) &= E_h(t)P_hu_0-E(t)u_0+\int_0^t(E_h(t-s)P_h-E(t-s))\mathrm{d}W(s)\\ &= F_h(t)u_0+\int_0^t F_h(t-s)\mathrm{d}W(s)=I+II. \end{aligned}$$

因而

$$\|e(t)\|_{L_2(\Omega;H)} \leqslant 2(\|I\|_{L_2(\Omega;H)} + \|II\|_{L_2(\Omega;H)}).$$

对于I, 在式(2.1.13)中取$v = u_0$, 有

$$\|I\| = \|F_h(t)u_0\| \leqslant Ch^\beta |u_0|_\beta, \quad 0 \leqslant \beta \leqslant 1.$$

即$\|I\|_{L_2(\Omega;H)} \leqslant Ch^\beta \|u_0\|_{L_2(\Omega;\dot{H}^\beta)}$.

对于II, 由Itô等距式(1.5.40), 有

$$\begin{aligned}\|II\|^2_{L_2(\Omega;H)} &= E\left\|\int_0^t F_h(t-s)\mathrm{d}W(s)\right\|^2 = \int_0^t \|F_h(t-s)\|^2_{L_2^0}\mathrm{d}s \\ &= \sum_{l=1}^{\infty}\int_0^t \|F_h(t-s)Q^{1/2}e_l\|^2\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

其中$\{e_l\}$是H中任一正交基.

在式(2.1.14)中取$v = Q^{1/2}e_l$, 得到

$$\begin{aligned}\|II\|^2_{L_2(\Omega;H)} &\leqslant C\sum_{l=1}^{\infty} h^{2\beta}|Q^{1/2}e_l|^2_{\beta-1} = C\sum_{l=1}^{\infty} h^{2\beta}\|A^{(\beta-1)/2}Q^{1/2}e_l\|^2 \\ &= Ch^{2\beta}\|A^{(\beta-1)/2}\|^2_{L_2^0},\end{aligned}$$

从而式(2.2.7)得证.

如果$W(t)$是Wiener过程, $\mathrm{Tr}(Q) < \infty$. 在式(2.2.7)中取$\beta = 1$, 由$\|I\|^2_{L_2^0} = \mathrm{Tr}(Q)$可得式(2.2.8)成立. ¶

定理 2.2.3 设u_h和u分别是式(2.2.3)和式(2.2.1)的解, 假设$\|A^{(\beta-1)/2}\|_{L_2^0} < \infty, \beta \in [0,1]$, 则对$0 \leqslant t \leqslant T, u_0 \in L_2(\Omega;\dot{H}^\beta), \ell_h = \log(\frac{T}{h^2})$, 有

$$\|u_h(t) - u(t)\|_{L_2(\Omega;\dot{H}^{-1})} \leqslant Ch^{\beta+1}(\|u_0\|_{L_2(\Omega;\dot{H}^\beta)} + \ell_h \| A^{(\beta-1)/2} \|_{L_2^0}). \tag{2.2.9}$$

特殊地, 若$W(t)$是H-值Wiener过程, $\mathrm{Tr}(Q) < \infty$, 则对$0 \leqslant t \leqslant T, u_0 \in L_2(\Omega;\dot{H}^1)$, 有

$$\|u_h(t) - u(t)\|_{L_2(\Omega;\dot{H}^{-1})} \leqslant Ch^2(\|u_0\|_{L_2(\Omega;\dot{H}^1)} + \ell_h \mathrm{Tr}(Q)^{\frac{1}{2}}). \tag{2.2.10}$$

证明 下面符号与定理2.2.2所使用的符号相同, 由式(2.1.15)得

$$\|I\|_{L_2(\Omega;\dot{H}^{-1})} \leqslant Ch^{\beta+1}\|u_0\|_{L_2(\Omega;\dot{H}^\beta)}, \quad 0 \leqslant \beta \leqslant 1.$$

对于II, 由Itô等距式(1.5.40)且在式(2.1.16)中取$v = Q^{\frac{1}{2}}e_l$, 则

$$\begin{aligned}\|II\|^2_{L_2(\Omega;\dot{H}^{-1})} &= E|\int_0^t F_h(t-s)\mathrm{d}W(s)|^2_{-1} = E\|\int_0^t A^{-1/2}F_h(t-s)\mathrm{d}W(s)\|^2 \\ &= \int_0^t \|A^{-1/2}F_h(t-s)\|^2_{L_2^0}\mathrm{d}s \leqslant Ch^{2(\beta+1)}\ell_h^2\sum_{l=1}^{\infty}\|A^{(\beta-1)/2}Q^{1/2}e_l\|^2 \\ &\leqslant Ch^{2(\beta+1)}\ell_h^2\|A^{(\beta-1)/2}\|^2_{L_2^0}.\end{aligned}$$

式(2.2.9)得证.

特殊地, 若$W(t)$是H上的Wiener过程且$\mathrm{Tr}(Q) < \infty$, 则在式(2.2.9)中取$\beta = 1$, 可得式(2.2.10)成立. ¶

2.2.2 全离散格式的有限元误差估计

本节详细介绍文献[14]的研究成果, 即带有可乘噪声项的随机抛物方程的有限元全离散分析方法. 考虑Hilbert空间H上初值问题

$$\mathrm{d}u + Au\mathrm{d}t = \sigma(u)\mathrm{d}W,\ \ 0 \leqslant t \leqslant T,\ \ u(0) = u_0, \tag{2.2.11}$$

其中算子A和噪声项W同2.2.1小节, $\sigma : H \to L_2^0(H)$满足以下假设条件:

假设 2.2.1 假设σ是定义在H上的非线性算子值函数, 满足下面的全局Lipschitz条件和增长条件.

(1) $\| \sigma(x) - \sigma(y) \|_{L_2^0} \leqslant C \| x - y \|,\ \ \forall x, y \in H.$

(2) $\| \sigma(x) \|_{L_2^0} \leqslant C \| x \|,\ \ \forall x \in H.$

注意到若$\mathrm{Tr}(Q) = \infty$, 恒等映射$\sigma(u) = I$不满足条件(2), 为了覆盖这种情况, 条件(2)的修正形式为

(3) $\| A^{\frac{\beta-1}{2}} \sigma(x) \|_{L_2^0} \leqslant C \| x \|, \beta \in [0, 1], \forall x \in H.$

不难看出(2)是(3)取$\beta = 1$的特殊情况. 若$\sigma(\cdot) = I$, 条件(3)变为$\| A^{\frac{\beta-1}{2}} \sigma(x) \|_{L_2^0} \leqslant C.$

方程(2.2.11)具有下列形式的温和解

$$u(t) = E(t)u_0 + \int_0^t E(t-s)\sigma(u(s))\mathrm{d}W(s). \tag{2.2.12}$$

方程(2.2.11)的离散形式为

$$\mathrm{d}u_h + A_h u_h \mathrm{d}t = P_h \sigma(u_h)\mathrm{d}W,\ \ 0 < t \leqslant T,\ \ u_h(0) = P_h u_0, \tag{2.2.13}$$

其中$A_h : S_h \to S_h$是A的相应的离散算子, 定义为

$$(A_h \psi, \chi) = A(\psi, \chi),\ \ \forall \psi, \chi \in S_h. \tag{2.2.14}$$

其相应的离散温和解为

$$u_h(t) = E_h(t)P_h u_0 + \int_0^t E_h(t-s)P_h \sigma(u_h(s))\mathrm{d}W(s).$$

记$U^n = U_h^n$表示$u(t_n)$的近似解. 定义向后Euler格式为

$$\frac{U^n - U^{n-1}}{k} + A_h U^n = \frac{1}{k}\int_{t_{n-1}}^{t_n} P_h \sigma(U^{n-1})\mathrm{d}W(s),\ \ n \geqslant 1,\ \ U^0 = P_h u_0. \tag{2.2.15}$$

记$r(\lambda) = \frac{1}{1+\lambda}$, 则式(2.2.15)可写为

$$U^n = r(kA_h)U^{n-1} + \int_{t_{n-1}}^{t_n} r(kA_h)P_h \sigma(U^{n-1})\mathrm{d}W(s),\ \ n \geqslant 1,\ \ U^0 = P_h u_0. \tag{2.2.16}$$

在证明有限元全离散格式(2.2.16)的误差估计之前, 先给出随机抛物方程(2.2.11)的温和解(2.2.12)所具有的正则性.

定理 2.2.4 设σ满足假设2.2.1的(1)和(3), $u(t)$是方程(2.2.11)的温和解, 则对$u_0 \in L_2(\Omega; \dot{H}^\beta)$, 成立

$$\|u(t)\|_{L_2(\Omega;\dot{H}^\beta)} \leqslant C(\|u_0\|_{L_2(\Omega;\dot{H}^\beta)} + \sup_{0\leqslant s\leqslant T} \|u(s)\|_{L_2(\Omega;H)}). \tag{2.2.17}$$

特殊地, 若σ满足(1)和(2), 则对于$u_0 \in L_2(\Omega; \dot{H}^1)$, 有

$$\|u(t)\|_{L_2(\Omega;\dot{H}^1)} \leqslant C(\|u_0\|_{L_2(\Omega;\dot{H}^1)} + \sup_{0\leqslant s\leqslant T} \|u(s)\|_{L_2(\Omega;H)}). \tag{2.2.18}$$

证明 因为

$$u(t) = E(t)u_0 + \int_0^t E(t-s)\sigma(u(s))\mathrm{d}W(s), \tag{2.2.19}$$

则对于$\forall \beta \geqslant 0$, 利用$E(t)$的稳定性质和Itô等距式(1.5.40)有

$$\begin{aligned}
E|u(t)|_\beta^2 &\leqslant 2E|E(t)u_0|_\beta^2 + 2E\|\int_0^t A^{\beta/2}E(t-s)\sigma(u(s))\mathrm{d}W(s)\|^2 \\
&\leqslant 2E|u_0|_\beta^2 + 2E\int_0^t \|A^{\beta/2}E(t-s)\sigma(u(s))\|_{L_2^0}^2\mathrm{d}s \\
&\leqslant 2E|u_0|_\beta^2 + 2E\int_0^t \|A^{1/2}E(t-s)A^{(\beta-1)/2}\sigma(u(s))\|_{L_2^0}^2\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

由假设2.2.1中的(3)和引理2.1.1有

$$\begin{aligned}
&E\int_0^t \|A^{1/2}E(t-s)A^{(\beta-1)/2}\sigma(u(s))\|_{L_2^0}^2\mathrm{d}s \\
\leqslant\ & \left(\int_0^t \|A^{1/2}E(t-s)\|^2\mathrm{d}s\right)\sup_{0\leqslant s\leqslant t} E\|u(s)\|^2 \\
\leqslant\ & C\sup_{0\leqslant s\leqslant t} E\|u(s)\|^2.
\end{aligned}$$

因此可得

$$E|u(t)|_\beta^2 \leqslant C(E|u_0|_\beta^2 + \sup_{0\leqslant s\leqslant t} E\|u(s)\|^2).$$

由于

$$(\sup_{0\leqslant s\leqslant t} E\|u(s)\|^2)^{1/2} \leqslant \sup_{0\leqslant s\leqslant t} (E\|u(s)\|^2)^{1/2} = \sup_{0\leqslant s\leqslant t} \|u(s)\|_{L_2(\Omega;H)},$$

因此式(2.2.17)得证.

特殊地, 若(2)成立, 则$\beta = 1$, 于是式(2.2.18)成立. ¶

如果定理2.2.4中的Q-Wiener过程W是一个柱Wiener过程, 即$\sigma(\cdot) = I$是恒等算子, 则有如下推论.

推论 2.2.2 设$u(t)$是式(2.2.11)的温和解. 假设$\sigma(\cdot) = I$, 若对于$\beta \in [0,1]$, 有$\| A^{\frac{\beta-1}{2}} \|_{L_2^0} < \infty$, 则对于$t \in [0,T]$, 有

$$\|u(t)\|_{L_2(\Omega;\dot{H}^\beta)} \leqslant C(\|u_0\|_{L_2(\Omega;\dot{H}^\beta)} + \|A^{(\beta-1)/2}\|_{L_2^0}), \quad u_0 \in L_2(\Omega; \dot{H}^\beta). \tag{2.2.20}$$

特殊地, 若$W(t)$是H-值Wiener过程且$\mathrm{Tr}(Q)<\infty$, 则

$$\|u(t)\|_{L_2(\Omega;\dot{H}^1)} \leqslant C(\|u_0\|_{L_2(\Omega;\dot{H}^1)} + \mathrm{Tr}(Q)^{1/2}), \quad u_0 \in L_2(\Omega;\dot{H}^1). \tag{2.2.21}$$

下面的引理给出了随机抛物方程(2.2.11)的温和解关于时间的正则性.

引理 2.2.2 设u是式(2.2.11)的温和解, 假设2.2.1的条件(3)成立. 则对于$0\leqslant\gamma<\beta\leqslant 1$, 有

$$E\|u(t_2)-u(t_1)\|^2 \leqslant C(t_2-t_1)^\gamma E|u_0|_\gamma^2 + C(t_2-t_1)^\gamma \sup_{0\leqslant s\leqslant T} E\|u(s)\|^2. \tag{2.2.22}$$

通过以上准备工作, 下面给出问题(2.2.11)与随机抛物方程有限元全离散格式(2.2.16)之间在范数$\|\cdot\|$下的误差估计.

定理 2.2.5 设U^n和$u(t_n)$分别是式(2.2.16)和式(2.2.11)的解, σ满足假设2.2.1的条件(1)和(3), $0\leqslant\beta\leqslant 1$, $u_0\in L_2(\Omega;\dot{H}^\beta)$. 则存在常数$C=C(T)$使得

$$\|U^n-u(t_n)\|_{L_2(\Omega;H)} \leqslant C(k^{\gamma/2}+h^\beta)(\|u_0\|_{L_2(\Omega;\dot{H}^\beta)} + \sup_{0\leqslant s\leqslant T}\|u(s)\|_{L_2(\Omega;H)}), \tag{2.2.23}$$

其中$t_n\in[0,T]$且$0\leqslant\gamma<\beta\leqslant 1$.

特殊地, 若σ满足假设2.2.1中的(1)和(2), 则对于$u_0\in L_2(\Omega;\dot{H}^1)$且$0\leqslant\gamma<1$, 有

$$\|U^n-u(t_n)\|_{L_2(\Omega;H)} \leqslant C(k^{\gamma/2}+h)(\|u_0\|_{L_2(\Omega;\dot{H}^1)} + \sup_{0\leqslant s\leqslant T}\|u(s)\|_{L_2(\Omega;H)}). \tag{2.2.24}$$

证明 由式(2.2.16)知

$$U^n = E_{kn}^n P_h u_0 + \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} E_{kn}^{n-j} P_h \sigma(U^{j-1}) \mathrm{d}W(s),$$

且

$$u(t_n) = E(t_n)u_0 + \int_0^{t_n} E(t_n-s)\sigma(u(s))\mathrm{d}W(s).$$

记$e^n=U^n-u(t_n), F_n=E_{kn}^n P_h - E(t_n)$, 有

$$\begin{aligned}
e^n &= F_n u_0 + \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} r(kA_h)^{n-j} P_h(\sigma(U^{j-1})-\sigma(u(t_{j-1})))\mathrm{d}W(s) + \\
&\quad \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} r(kA_h)^{n-j} P_h(\sigma(u(t_{j-1}))-\sigma(u(s)))\mathrm{d}W(s) + \\
&\quad \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} (r(kA_h)^{n-j} P_h - E(t_n-t_j))\sigma(u(s))\mathrm{d}W(s) + \\
&\quad \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} (E(t_n-t_j)-E(t_n-s))\sigma(u(s))\mathrm{d}W(s) \\
&= \sum_{j=1}^5 I_j.
\end{aligned}$$

因此

$$\|e^n\|_{L_2(\Omega;H)} \leqslant C\sum_{j=1}^{5}\|I_j\|_{L_2(\Omega;H)}.$$

对于I_1, 在式(2.1.37)中取$v=u_0$, 则

$$\|I_1\| = \|F_n u_0\| \leqslant C(k^{\beta/2}+h^{\beta})|u_0|_{\beta},$$

即$\|I_1\|_{L_2(\Omega;H)} \leqslant C(k^{\beta/2}+h^{\beta})\|u_0\|_{L_2(\Omega;\dot{H}^{\beta})}$.

对于I_2, 由Itô等距式(1.5.40), $r(\lambda)$的稳定性及Lipschitz条件有

$$\begin{aligned}
\|I_2\|^2_{L_2(\Omega;H)} &= E\|\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j} r(kA_h)^{n-j}P_h(\sigma(U^{j-1})-\sigma(u(t_{j-1})))\mathrm{d}W(s)\|^2\\
&= k\sum_{j=1}^{n}E\|r(kA_h)^{n-j}P_h(\sigma(U^{j-1})-\sigma(u(t_{j-1})))\|^2_{L_2^0}\\
&\leqslant k\sum_{j=1}^{n}\|r(kA_h)^{n-j}P_h\|^2E\|\sigma(U^{j-1})-\sigma(u(t_{j-1}))\|^2_{L_2^0}\\
&\leqslant Ck\sum_{j=1}^{n}E\|U^{j-1}-u(t_{j-1})\|^2 = C\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}E\|e^{j-1}\|^2\mathrm{d}s\\
&= Ck\sum_{j=1}^{n}\|e^j\|^2.
\end{aligned}$$

对于I_3, 由引理2.2.2, 当$0\leqslant\gamma<\beta\leqslant 1$时, 有

$$\begin{aligned}
\|I_3\|^2_{L_2(\Omega;H)} &= \sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}E\|r(kA_h)^{n-j}P_h(\sigma(u(t_{j-1}))-\sigma(u(s)))\|^2_{L_2^0}\mathrm{d}s\\
&\leqslant C\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}E\|u(t_{j-1})-u(s)\|^2\mathrm{d}s\\
&\leqslant C(\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(s-t_{j-1})^{\gamma}\mathrm{d}s)(E|u_0|^2_{\gamma}+\sup_{0\leqslant s\leqslant T}E\|u(s)\|^2)\\
&\leqslant Ck^{\gamma}(E|u_0|^2_{\gamma}+\sup_{0\leqslant s\leqslant T}E\|u(s)\|^2).
\end{aligned}$$

对于I_4有

$$\begin{aligned}
\|I_4\|^2_{L_2(\Omega;H)} &= E\|\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}F_{n-j}\sigma(u(s))\mathrm{d}W(s)\|^2\\
&= \sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}E\|F_{n-j}A^{(1-\beta)/2}A^{(1-\beta)/2}\sigma(u(s))\|^2_{L_2^0}\mathrm{d}s\\
&\leqslant C(k\sum_{j=1}^{n}\|F_jA^{(1-\beta)/2}\|^2)\sup_{0\leqslant s\leqslant T}E\|u(s)\|^2.
\end{aligned}$$

先假设

$$k\sum_{j=1}^{n}\|F_jA^{(1-\beta)/2}\|^2\leqslant C(k^\beta+h^{2\beta}) \tag{2.2.25}$$

成立, 则

$$\|I_4\|^2_{L_2(\Omega;H)}\leqslant C(k^\beta+h^{2\beta})\sup_{0\leqslant s\leqslant T}E\|u(s)\|^2.$$

对于I_5, 有

$$\begin{aligned}
\|I_5\|^2_{L_2(\Omega;H)} &= E\|\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(E(t_n-t_j)-E(t_n-s))\sigma(u(s))\mathrm{d}W(s)\|^2\\
&= \sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}E\|(E(t_n-t_j)-E(t_n-s))A^{(1-\beta)/2}A^{(1-\beta)/2}\sigma(u(s))\|^2_{L_2^0}\mathrm{d}s\\
&\leqslant C(\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\|(E(t_n-t_j)-E(t_n-s))A^{(1-\beta)/2}\|^2\mathrm{d}s)\sup_{0\leqslant s\leqslant T}E\|u(s)\|^2.
\end{aligned}$$

由引理2.1.1和引理2.1.2知

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\|(E(t_n-t_j)-E(t_n-s))A^{(1-\beta)/2}\|^2\mathrm{d}s\\
=\ &\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\|A^{1/2}E(t_n-t_j)A^{-\beta/2}(I-E(t_j-s))\|^2\mathrm{d}s\\
\leqslant\ &Ck^\beta\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\|A^{1/2}E(t_n-t_j)\|^2\mathrm{d}s\\
=\ &Ck^\beta(\sum_{j=1}^{n}k\|A^{1/2}E(t_n-t_j)\|^2)\leqslant Ck^\beta,
\end{aligned}$$

所以

$$\|I_5\|^2_{L_2(\Omega;H)}\leqslant Ck^\beta\sup_{0\leqslant s\leqslant T}E\|u(s)\|^2.$$

下面证明式(2.2.25)成立. 事实上, 由式(2.1.38)得

$$\begin{aligned}
k\sum_{j=1}^{n}\|F_jA^{(1-\beta)/2}\|^2 &= k\sum_{j=1}^{n}(\sup_{v\neq 0}\frac{\|F_jA^{(1-\beta)/2}v\|}{\|v\|})^2\\
&= \sup_{v\neq 0}\frac{k\sum_{j=1}^{n}\|F_jA^{(1-\beta)/2}v\|^2}{\|v\|^2}\\
&\leqslant \sup_{v\neq 0}\frac{C(k^\beta+h^{2\beta})|A^{(1-\beta)/2}v|^2_{\beta-1}}{\|v\|^2}\leqslant C(k^\beta+h^{2\beta}).
\end{aligned}$$

综上, 对于$0\leqslant\gamma<\beta\leqslant 1$, 有

$$E\|e^n\|^2\leqslant C(k^\gamma+h^{2\beta})E|u_0|^2_\beta+Ck\sum_{j=1}^{n}E\|e^j\|^2 \tag{2.2.26}$$

$$+C(k^\gamma+h^{2\beta})\sup_{0\leqslant s\leqslant T}E\|u(s)\|^2.$$

由离散的Gronwall引理1.2.3, 有

$$E\|e^n\|^2\leqslant C(k^\gamma+h^{2\beta})(E|u_0|_\beta^2+\sup_{0\leqslant s\leqslant T}E\|u(s)\|^2), \tag{2.2.27}$$

即

$$\|e^n\|_{L_2(\Omega;H)}\leqslant C(k^{\gamma/2}+h^\beta)(E|u_0|_{L_2(\Omega;\dot H^\beta)}+\sup_{0\leqslant s\leqslant T}\|u(s)\|_{L_2(\Omega;H)}). \tag{2.2.28}$$

证毕. ¶

在定理2.2.5中令$\sigma(\cdot)=I$, 则有如下的误差估计.

定理 2.2.6 设U^n和$u(t_n)$分别是式(2.2.16)和式(2.2.11)的解. 假设$\sigma(\cdot)=I$, $u_0\in L_2(\Omega;\dot H^\beta)$, $0\leqslant\beta\leqslant 1$. 若对于$\beta\in[0,1]$, 有$\|\ A^{\frac{\beta-1}{2}}\ \|_{L_2^0}<\infty$, 则

$$\|U^n-u(t_n)\|_{L_2(\Omega;\dot H^{-l})}\leqslant C(k^{(\beta+l)/2}+h^{\beta+l})(\|u_0\|_{L_2(\Omega;\dot H^\beta)}+\ell_k^l\|A^{(\beta-1)/2}\|_{L_2^0}), \tag{2.2.29}$$

其中$l=0,1,\ell_k=\log(\frac{T}{k}),T=t_n$.

特殊地, 若$W(t)$是H-值Wiener过程且$\mathrm{Tr}(Q)<\infty$, 则对于$u_0\in L_2(\Omega;\dot H^1)$, 有

$$\|U^n-u(t_n)\|_{L_2(\Omega;\dot H^{-l})}\leqslant C(k^{(1+l)/2}+h^{1+l})(\|u_0\|_{L_2(\Omega;\dot H^1)}+\ell_k^lTr(Q)^{1/2}). \tag{2.2.30}$$

证明 首先考虑$l=0$的情况. 由于

$$U^n=E_{kn}^nP_hu_0+\sum_{j=1}^n\int_{t_{j-1}}^{t_j}E_{kn}^{n-j+1}P_h\mathrm{d}W(s),$$

而

$$u(t_n)=E(t_n)u_0+\int_0^{t_n}E(t_n-s)\mathrm{d}W(s).$$

记$e^n=U^n-u(t_n),F_n=E_{kn}^nP_h-E(t_n)$, 有

$$\begin{aligned}e^n&=F_nu_0+\sum_{j=1}^n\int_{t_{j-1}}^{t_j}F_{n-j+1}\mathrm{d}W(s)+\sum_{j=1}^n\int_{t_{j-1}}^{t_j}(E(t_n-t_{j-1})-E(t_n-s))\mathrm{d}W(s)\\&=I+II+III.\end{aligned}$$

因而

$$\|e^n\|_{L_2(\Omega;H)}\leqslant C(\|I\|_{L_2(\Omega;H)}+\|II\|_{L_2(\Omega;H)}+\|III\|_{L_2(\Omega;H)}).$$

对于I, 在式(2.1.37)中取$v=u_0$, 有

$$\|I\|=\|F_nu_0\|\leqslant C(k^{\beta/2}+h^\beta)|u_0|_\beta,$$

即$\|I\|_{L_2(\Omega;H)} \leqslant C(k^{\beta/2}+h^\beta)\|u_0\|_{L_2(\Omega;\dot{H}^\beta)}$.

对于II, 由Itô等距式(1.5.40)有

$$\begin{aligned}\|II\|^2_{L_2(\Omega;H)} &= E\|\sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} F_{n-j+1}\mathrm{d}W(s)\|^2 = \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|F_{n-j+1}\|^2_{L_2^0}\mathrm{d}s \\ &= \sum_{l=1}^\infty (k\sum_{j=1}^n \|F_{n-j+1}Q^{1/2}e_l\|^2),\end{aligned}$$

其中$\{e_l\}$是H中的正交基. 在式(2.1.38)中取$v=Q^{\frac{1}{2}}e_l$, 得

$$\begin{aligned}\|II\|^2_{L_2(\Omega;H)} &\leqslant C\sum_{l=1}^\infty (k^\beta+h^{2\beta})|Q^{1/2}e_l|^2_{\beta-1} \\ &= C\sum_{l=1}^\infty (k^\beta+h^{2\beta})\|A^{(\beta-1)/2}Q^{1/2}e_l\|^2 = C(k^\beta+h^{2\beta})\|A^{(\beta-1)/2}\|^2_{L_2^0}.\end{aligned}$$

对于III, 由Itô等距式(1.5.40)有

$$\begin{aligned}\|III\|^2_{L_2(\Omega;H)} &= \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|(E(t_n-t_{j-1})-E(t_n-s))\|^2_{L_2^0}\mathrm{d}s \\ &= \sum_{l=1}^\infty \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|A^{-\beta/2}(E(s-t_{j-1})-I)A^{\beta/2}E(t_n-s)Q^{1/2}e_l\|^2\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

在式(2.1.4)和式(2.1.6)中取$v=A^{\frac{\beta-1}{2}}Q^{\frac{1}{2}}e_l$得到

$$\begin{aligned}\|III\|^2_{L_2(\Omega;H)} &\leqslant Ck^\beta \sum_{l=1}^\infty \int_0^{t_n} \|A^{1/2}E(t_n-s)A^{(\beta-1)/2}Q^{1/2}e_l\|^2\mathrm{d}s \\ &\leqslant Ck^\beta \sum_{l=1}^\infty \|A^{(\beta-1)/2}Q^{1/2}e_l\|^2 = Ck^\beta\|A^{(\beta-1)/2}\|^2_{L_2^0}.\end{aligned} \tag{2.2.31}$$

当$l=1$时, 由式(2.1.39)得

$$\|I\|_{L_2(\Omega;\dot{H}^{-1})} \leqslant Ch^{\beta+1}\|u_0\|_{L_2(\Omega;\dot{H}^\beta)}, \quad 0\leqslant\beta\leqslant 1.$$

对于II, 由Itô等距式(1.5.40)且在式(2.1.40)中取$v=Q^{\frac{1}{2}}e_l$, 有

$$\begin{aligned}\|II\|^2_{L_2(\Omega;\dot{H}^{-1})} &= E\|\sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} A^{-1/2}F_{n-j+1}\mathrm{d}W(s)\|^2 \\ &= \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|A^{-1/2}F_{n-j+1}\|^2_{L_2^0}\mathrm{d}s \\ &= \sum_{l=1}^\infty (k\sum_{j=1}^n \|A^{-1/2}F_{n-j+1}Q^{1/2}e_l\|^2) \\ &\leqslant C(k^{\beta+1}+h^{2(\beta+1)})\ell_k^2 \sum_{l=1}^\infty \|A^{(\beta-1)/2}Q^{1/2}e_l\|^2\end{aligned}$$

$$\leqslant \quad C(k^{\beta+1}+h^{2(\beta+1)})\ell_k^2\|A^{(\beta-1)/2}\|_{L_2^0}^2.$$

对于III, 由Itô等距式(1.5.40)有

$$\|III\|_{L_2(\Omega;\dot{H}^{-1})}^2=\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\|A^{-1/2}(E(t_n-t_{j-1})-E(t_n-s))\|_{L_2^0}^2\mathrm{d}s$$

$$=\quad \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\|A^{-(\beta+1)/2}(E(s-t_{j-1})-I)A^{1/2}E(t_n-s)A^{(\beta-1)/2}Q^{1/2}e_l\|^2\mathrm{d}s.$$

按照式(2.2.31)的证明, 有

$$\|III\|_{L_2(\Omega;\dot{H}^{-1})}^2\leqslant Ck^{\beta}\|A^{(\beta-1)/2}\|_{L_2^0}^2.$$

综合以上估计, 式(2.2.29)得证. 类似地, 若$W(t)$是Wiener过程且$\mathrm{Tr}(Q)<\infty$, 取$\beta=1$即可得定理证明. ¶

在定理2.2.6中令$\sigma(\cdot)=I$且$d=1$, 取$Q=I$, 则有如下推论.

推论 2.2.3 设U^n和$u(t_n)$分别是式(2.2.16)和式(2.2.11)的解, $\sigma(\cdot)=I$, 算子$A=-\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, 其定义域$D(A)=H_0^1\cap H^2(0,1)$. 若$W(t)$是柱Wiener过程, $Q=I$, 则对于$u_0\in L_2(\Omega;\dot{H}^{\beta}), l=0,1$, 有

$$\|U^n-u(t_n)\|_{L_2(\Omega;\dot{H}^{-l})}\leqslant C(k^{(\beta+l)/2}+h^{\beta+l})(\|u_0\|_{L_2(\Omega;\dot{H}^{\beta})}+\ell_k),\qquad 0\leqslant\beta<\frac{1}{2},$$

其中$\ell_k=\log(\frac{T}{k}), T=t_n$.

2.3 非自伴算子随机抛物方程有限元方法

算子自伴时随机抛物方程的有限元研究成果已经非常丰富, 但对于算子非自伴时随机抛物方程的有限元研究很少涉及. 本节介绍非自伴算子随机抛物方程的有限元方法, 通过建立非自伴算子与自伴算子所定义范数之间的一种等价关系, 将非自伴算子抛物方程的有限元估计转化成自伴算子抛物方程的有限元分析, 进而得到非自伴算子随机抛物方程的有限元误差估计.

2.3.1 空间半离散格式的误差估计

考虑如下随机抛物方程

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}X(t)+AX(t)\mathrm{d}t=F(X(t))\mathrm{d}t+G(X(t))\mathrm{d}W(t),\ t\in[0,T],\\&X(0)=X_0,\end{aligned}\tag{2.3.1}$$

其中$A:D(A)\subset H\to H$是线性、非自伴、不必有界且具有紧逆的算子.

$$A=-\sum_{i,j=1}^{d}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right)+\sum_{i=1}^{d}a_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}+a_0(x),\tag{2.3.2}$$

其中a_{ij}, a_i在$\overline{\Omega}$上连续可微且a_{ij}一致正定, 即存在常数$c > 0$使得

$$\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant c \mid \xi \mid^2, \forall \xi \in \mathbb{R}^d, x \in \overline{\Omega}.$$

则A的双线性形式为

$$a(u,v) = \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{v}}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{d} a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \overline{v} + a_0(x) u \overline{v} \right) \mathrm{d}x.$$

由Gårding不等式, 存在常数$c_0 \in \mathbb{R}$和$c_1 > 0$, 使得

$$\mathrm{Re} a(v,v) + c_0 \|v\| \geqslant c_1 \|v\|_1, \forall v \in V.$$

为了分析方便起见, 记$A = A_0 + B$, 其中

$$A_0 u = -\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + a_0(x) u,\ Bu = \sum_{i=1}^{d} a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

为使非自伴随机抛物方程(2.3.1)存在唯一的温和解, 我们需要以下假设条件.

假设 2.3.1 存在常数$L > 0$, 使得非线性映射$F: H \to H$满足如下的Lipschitz条件:

$$\|F(x) - F(y)\| \leqslant L\|x - y\|, \quad \forall x, y \in H. \tag{2.3.3}$$

假设 2.3.2 存在常数$L > 0, C > 0$, 使得非线性映射$G: H \to L_2^0$满足如下的Lipschitz条件和增长条件:

$$\|G(x) - G(y)\|_{L_2^0} \leqslant L\|x - y\|, \quad \forall x, y \in H, \tag{2.3.4}$$

$$\|A^{\frac{\beta}{2}} G(x)\|_{L_2^0} \leqslant C(\|x\|_\beta + 1), \quad \forall x \in D(A^{\frac{\beta}{2}}),\ \beta \in (0,1). \tag{2.3.5}$$

假设 2.3.3 设$\beta \in (0,1)$, 初始值$X_0: \Omega \to \dot{H}^{\beta+1}$是$\mathcal{F}_0$可测的随机变量且$E \parallel X_0 \parallel_{\beta+1}^2 \leqslant C$, 则对于$r \in [0,1)$, 有

$$\sup_{t \in [0,T]} E\|X(t)\|_s^2 < \infty, \quad \forall s \in [0, r+1]. \tag{2.3.6}$$

在上述假设条件下, 方程(2.3.1)存在唯一的温和解, 可表示为

$$X(t) = E(t)X_0 + \int_0^t E(t-s)F(X(s))\mathrm{d}s + \int_0^t E(t-s)G(X(s))\mathrm{d}W(s), \tag{2.3.7}$$

其中$E(t) = \mathrm{e}^{-tA}$. 方程(2.3.1)相应的半离散形式为

$$\mathrm{d}X_h(t) + A_h X_h(t)\mathrm{d}t = P_h F(X_h(t))\mathrm{d}t + P_h G(X_h(t))\mathrm{d}W(t), \tag{2.3.8}$$

其温和解为

$$\begin{aligned} X_h(t) &= E_h(t)P_hX_0+\int_0^t E_h(t-s)P_hF(X_h(s))\mathrm{d}s+ \\ & \int_0^t E_h(t-s)P_hG(X_h(s))\mathrm{d}W(s),\ t\in(0,T], \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

其中$E_h(t)=\mathrm{e}^{-tA_h}$. 定义式(2.3.1)的向后Euler格式为

$$\frac{X_h^n-X_h^{n-1}}{k}=-A_hX_h^n+\frac{1}{k}\int_{t_{n-1}}^{t_n}P_hF(X_h^{n-1})\mathrm{d}s+\frac{1}{k}\int_{t_{n-1}}^{t_n}P_hG(X_h^{n-1})\mathrm{d}W(s), \tag{2.3.10}$$

其中$R(kA_h)=(I+kA_h)^{-1}$. 即

$$\begin{aligned} X_h^n &= R(kA_h)X_h^{n-1}+\int_{t_{n-1}}^{t_n}R(kA_h)P_hF(X_h^{n-1})\mathrm{d}s+ \\ & \int_{t_{n-1}}^{t_n}R(kA_h)P_hG(X_h^{n-1})\mathrm{d}W(s). \end{aligned} \tag{2.3.11}$$

为了得到非自伴算子A与自伴算子A_0之间的等价关系, 先给出如下两个引理, 其证明选自文献[16].

引理 2.3.1 *若$0\leqslant\alpha\leqslant 1, x\in D(A)$, 则$\|A^\alpha x\|\leqslant C\|Ax\|^\alpha\|x\|^{1-\alpha}$, 即对$\forall\varepsilon>0$, $\|A^\alpha x\|\leqslant\varepsilon\|Ax\|+C'\varepsilon^{-\alpha/(1-\alpha)}\|x\|$. (这里$C,C'$是与$\alpha$无关的常数.)*

证明 设$0<\beta<1,\varepsilon>0$, 所以(若对$t>0,\|\mathrm{e}^{-At}\|\leqslant C$)

$$\begin{aligned} \|\gamma(\beta)A^{-\beta}x\| &= \|(\int_0^\varepsilon+\int_\varepsilon^\infty)t^{\beta-1}\mathrm{e}^{-At}x\mathrm{d}t\| \\ &\leqslant C\|x\|\frac{\varepsilon^\beta}{\varepsilon}+\|\varepsilon^{\beta-1}\mathrm{e}^{-A\varepsilon}A^{-1}x+(\beta-1)\int_\varepsilon^\infty t^{\beta-2}\mathrm{e}^{-At}A^{-1}x\mathrm{d}t\| \\ &\leqslant C\|x\|\frac{\varepsilon^\beta}{\varepsilon}+2C\|A^{-1}x\|\varepsilon^{\beta-1}. \end{aligned}$$

对上式右端令$\varepsilon>0$趋于0, 从而得到结论

$$\|A^{-\beta}x\|\leqslant\frac{2(2(1-\beta))^{\beta-1}}{\Gamma(1+\beta)}C\|x\|^{1-\beta}\|A^{-1}x\|^\beta.$$

由于系数在$0<\beta<1$上是一致有界的, 所以可以用Ax去替代x, 并令$\alpha=1-\beta$, 从而得到所断言的结论. ¶

引理 2.3.2 *假设A,B是H中的扇形算子, 满足$D(A)=D(B),\mathrm{Re}\sigma(A)\geqslant 0,\mathrm{Re}\sigma(B)\geqslant 0$, 对于$\alpha\in[0,1)$, $(A-B)A^{-\alpha}$在H上有界. 则对于$\forall\beta\in[0,1]$, $A^\beta B^{-\beta}$和$B^\beta A^{-\beta}$在H上有界.*

证明 由引理2.3.1, 对于$0\leqslant\beta\leqslant 1,|\pi-\arg\lambda|\geqslant\phi$, 某些正常数$C$和$\phi<\frac{\pi}{2},\|A^\beta(\lambda+A)^{-1}\|\leqslant C|\lambda|^{\beta-1}$. 对于$0<\beta<1$,

$$B^{-\beta}-A^{-\beta}=\frac{1}{\pi}\sin\pi\beta\int_0^\infty\lambda^{-\beta}(\lambda+B)^{-1}(A-B)(\lambda+A)^{-1}\mathrm{d}\lambda,$$

这是容易估计的, 于是得$B^\beta A^{-\beta}$是有界的. 还有当$\lambda\to+\infty$ 时, $\|A^\alpha(\lambda+B)^{-1}\|=O(\|\lambda\|^{\alpha-1})$, 因为$\{I+A^\alpha(\lambda+A)^{-1}(B-A)A^{-\alpha}\}A^\alpha(\lambda+B)^{-1}=A^{-\alpha}(\lambda+A)^{-1}$, 所以在上面的积分恒等式中交换$A$和$B$的位置就证明$A^\beta B^{-\beta}$也是有界的. $\beta=0,\beta=1$的情形立即得到. ¶

基于上面两个引理, 可得非自伴算子A与自伴算子A_0有下面的等价关系.

引理 2.3.3 对于$s\in[0,2]$, $\|x\|_s=\|A^{\frac{s}{2}}x\|$和$\|A_0^{\frac{s}{2}}x\|=\sqrt{(A_0^{\frac{s}{2}}x,A_0^{\frac{s}{2}}x)}$在$H$上等价, 即

$$C_1\|A_0^{\frac{s}{2}}x\|\leqslant\|A^{\frac{s}{2}}x\|\leqslant C_2\|A_0^{\frac{s}{2}}x\|,\ \forall x\in V\cap\dot{H}^s(\Omega).\tag{2.3.12}$$

证明 由引理2.3.2知, 对于$\beta\in[0,1]$, $A_0^\beta A^{-\beta}$和$A^\beta A_0^{-\beta}$在$L_2(\Omega)$上有界. 因此

$$\begin{aligned}(A^{\frac{s}{2}}x,A^{\frac{s}{2}}x)&=(A^{\frac{s}{2}}A_0^{-\frac{s}{2}}A_0^{\frac{s}{2}}x,A^{\frac{s}{2}}A_0^{-\frac{s}{2}}A_0^{\frac{s}{2}}x)\\&\leqslant C(A_0^{\frac{s}{2}}x,A_0^{\frac{s}{2}}x)=C\|A_0^{\frac{s}{2}}x\|^2.\\(A_0^{\frac{s}{2}}x,A_0^{\frac{s}{2}}x)&=(A_0^{\frac{s}{2}}A^{-\frac{s}{2}}A^{\frac{s}{2}}x,A_0^{\frac{s}{2}}A^{-\frac{s}{2}}A^{\frac{s}{2}}x)\\&\leqslant C(A^{\frac{s}{2}}x,A^{\frac{s}{2}}x)=C\|A^{\frac{s}{2}}x\|^2.\end{aligned}$$

所以式(2.3.12)成立. 类似地,

$$C_1\|A_{0h}^{\frac{s}{2}}x_h\|\leqslant\|A_h^{\frac{s}{2}}x_h\|=\|x_h\|_s\leqslant C_2\|A_{0h}^{\frac{s}{2}}x_h\|,\ \forall x_h\in V_h.\tag{2.3.13}$$

引理得证. ¶

定义Ritz映射$R_h:V\to V_h$:

$$a(R_hv,x_h)=(Av,x_h)=a(v,x_h),\quad\forall v\in V,\ x_h\in V_h.\tag{2.3.14}$$

显然有

$$\|R_hv-v\|+h\|R_hv-v\|_{H^1(\Omega)}\leqslant Ch^r\|v\|_{H^r(\Omega)},\ v\in V\cap H^r(\Omega),\ r\in\{1,2\}.\tag{2.3.15}$$

引入映射$A_h:V_h\to V_h$, 使得

$$(A_hv_h,x_h)=a(v_h,x_h),\quad\forall x_h\in V_h.\tag{2.3.16}$$

设$\rho\geqslant0$, $E_h(t)$具有如下光滑性质:

$$\|A_h^\rho E_h(t)y_h\|\leqslant Ct^{-\rho}\|y_h\|,\ \forall t>0,\tag{2.3.17}$$

此外,

$$\|A_h^{\frac{1}{2}}y_h\|^2\leqslant C\|A_{0h}^{\frac{1}{2}}y_h\|^2=C\|A_0^{\frac{1}{2}}y_h\|^2\leqslant C\|A^{\frac{1}{2}}y_h\|^2.\tag{2.3.18}$$

设$G:L_2(\Omega)\to H^2\cap H_0^1$是式(2.3.1)的解算子, $G_h:L_2(\Omega)\to V_h$是G的近似算子, 使得

$$a(G_hf,\chi)=(f,\chi),\ \forall\chi\in V_h,\ t\in(0,T].$$

则有如下引理成立.

引理 2.3.4 在以上假设条件下, 有

(1) G_h在L_2上半正定, 在V_h上正定;

(2) 存在$r \geqslant 2$且对于$2 \leqslant s \leqslant r$,

$$\|(G_h - G)f\| \leqslant Ch^s\|f\|_s, \quad f \in H^{s-2};$$

(3) $|(G_h f, g) - (f, G_h g)| \leqslant C(f, G_h f)^{1/2}\|G_h g\|, \quad f, g \in L_2.$

由引理2.3.4,

$$A_h^{-1}P_h x = R_h A^{-1}x, \ \forall x \in \dot{H}^{-1} \tag{2.3.19}$$

成立, 且有

$$\|A_h^{-1/2}P_h x\| \leqslant C\|x\|_{-1}, \ \forall x \ \in \dot{H}^{-1}. \tag{2.3.20}$$

因为

$$\begin{aligned}
\|A_h^{-\frac{1}{2}}P_h x\| &= \sup_{v_h \in V_h}\frac{|(A_h^{-\frac{1}{2}}P_h x, v_h)|}{\|v_h\|} = \sup_{v_h \in V_h}\frac{|(x, (A_h^*)^{-\frac{1}{2}}v_h)|}{\|v_h\|} \\
&= \sup_{\omega_h \in V_h}\frac{|<x, \omega_h>|}{\|(A_h^*)^{\frac{1}{2}}\omega_h\|} \leqslant C\sup_{\omega_h \in V_h}\frac{|<x, \omega_h>|}{\|(A^*)^{\frac{1}{2}}\omega_h\|} \\
&\leqslant C\sup_{\omega \in V}\frac{|(x, \omega)|}{\|(A^*)^{\frac{1}{2}}\omega\|} = C\|A^{-\frac{1}{2}}x\|.
\end{aligned}$$

此外有

$$\|E_h P_h x\| = \|A_h^{\frac{1}{2}}E_h A_h^{-\frac{1}{2}}P_h x\| \leqslant Ct^{-\frac{1}{2}}\|A_h^{-\frac{1}{2}}P_h x\| \leqslant Ct^{-\frac{1}{2}}\|A^{-\frac{1}{2}}x\|, \tag{2.3.21}$$

其中$x \in \dot{H}^{-1}, t > 0$且$h \in (0, 1]$.

随机抛物方程(2.3.1)的有限元半离散格式(2.3.8)的误差估计需用到温和解[式(2.3.7)]的正则性, 如下两个定理分别给出了式(2.3.1)的温和解[式(2.3.7)]在空间和时间上的正则性.

定理 2.3.1 设$X(t)$是式(2.3.7)定义的温和解, 且假设条件: 假设2.3.1 ~假设2.3.3成立, 则有

$$(E\|A^{\frac{\gamma}{2}}X(t)\|^2)^{\frac{1}{2}} \leqslant C, \quad 0 \leqslant \gamma < 1.$$

此外, 对于$\beta \in [0, 1)$有

$$\left(E\|A^{\frac{\gamma}{2}}X(t)\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant C, \quad 0 \leqslant \gamma < 1 + \beta.$$

证明 下面只详细证明第二种情况. 由于

$$X(t) = E(t)X_0 + \int_0^t E(t-s)F(X(s))\mathrm{d}s + \int_0^t E(t-s)G(X(s))\mathrm{d}W(s).$$

则

$$
\begin{aligned}
(E\|X(t)\|_\gamma^2)^{\frac{1}{2}} \quad \leqslant \quad & \|A^{\frac{\gamma}{2}}E(t)X_0\|_{L_2(\mathbb{D};H)} + \int_0^t \left\|A^{\frac{\gamma}{2}}E(t-s)F(X(s))\right\|_{L_2(\mathbb{D};H)} \mathrm{d}s + \\
& \left(\int_0^t E\left\|A^{\frac{\gamma}{2}}E(t-s)G(X(s))\right\|_{L_2^0}^2 \mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}} =: I + II + III.
\end{aligned}
$$

由$E(t)$的稳定性得

$$
I \leqslant C\|A^{\frac{\gamma}{2}}X_0\|_{L_2(\mathbb{D};H)}.
$$

利用式(2.1.5)和假设2.3.1知

$$
II \quad \leqslant \quad C\int_0^t (t-s)^{-\frac{\gamma}{2}}\mathrm{d}s \leqslant C.
$$

由Itô等距式(1.5.40)和假设2.3.2有

$$
\begin{aligned}
III^2 \quad = \quad & \int_0^t E\left\|E(t-s)A^{\frac{\gamma-\beta}{2}}A^{\frac{\beta}{2}}G(X(s))\right\|_{L_2^0}^2 \mathrm{d}s \\
\leqslant \quad & C\int_0^t (t-s)^{-(\gamma-\beta)}E\|A^{\frac{\beta}{2}}G(X(s))\|_{L_2^0}^2\mathrm{d}s \\
\leqslant \quad & C(1+E\|X(t)\|_\beta^2) \leqslant C.
\end{aligned}
$$

综上有

$$
\left(E\|A^{\frac{\gamma}{2}}X(t)\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant C, \quad 0 \leqslant \gamma < 1+\beta,
$$

其中C取决于β和γ. 证毕. ¶

定理 2.3.2 设$X(t)$是式(2.3.1)的温和解, 假设条件: 假设2.3.1 ~假设2.3.3成立, $t_1, t_2 \in (0, T]$, 则有

$$
\left(E\|X(t_2)-X(t_1)\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant C|t_2-t_1|^\gamma,
$$

其中$\gamma \in [0, 1/2)$. 此外有

$$
\left(E\|X(t_2)-X(t_1)\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant C|t_2-t_1|^{\frac{\gamma}{2}},
$$

其中$\gamma \in [0, 1/2]$.

接下来看确定性方程

$$
\mathrm{d}u + Au\mathrm{d}t = 0,\ t>0, u(0)=u_0 \in \dot{H}^{-1} \tag{2.3.22}
$$

的误差估计. 其相应的半离散方程为

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_h(t) + A_hu_h(t) = 0,\ t>0,\ \ u_h(0) = P_hu_0, \tag{2.3.23}
$$

即

$$
G_hu_{ht} + u_h = 0,\ t>0, u_h(0) = P_hu_0. \tag{2.3.24}
$$

设$e=u_h-u$, 则有

$$G_he_t+e=(G_h-G)Au. \tag{2.3.25}$$

非自伴算子抛物方程(2.3.22)的有限元空间半离散格式[式(2.3.23)]的误差的时间导数估计有如下形式.

引理 2.3.5 假设引理2.3.4的(1)和(2)成立, 且$u_h(0)=P_hu_0$, 则

$$\|D_t^l(u_h(t)-u(t))\|\leqslant Ch^rt^{-r/2-l}\|u_0\|,\forall t>0,l\geqslant 0.$$

证明 对l加以归纳. $l=0$时显然成立. 假设$l-1(l\geqslant 1)$时成立, 设$e^{(l)}=D_t^l$. 对

$$T_he_t+e=\rho:=(T_h-T)Au,$$

求导得

$$T_he_t^{(l)}+e^{(l)}=\rho^{(l)}.$$

因为$T_he_t^{(l-1)}=T_he^{(l)}$, 上式两边同乘以$t^{r/2+l}$, 所以

$$\begin{aligned}T_h(t^{r/2+l}e^{(l)})_t+t^{r/2+l}e^{(l)} &= t^{r/2+l}\rho^{(l)}+(\frac{r}{2}+l)t^{r/2+l-1}T_he^{(l)}\\ &= t^{r/2+l}\rho^{(l)}+(\frac{r}{2}+l)t^{r/2+l-1}(\rho^{(l)}+e^{(l)}).\end{aligned}$$

注意到$t=0$时, $T_h(t^{r/2+l}e^{(l)}(t))=0$, 得

$$\begin{aligned}t^{r/2+l}\|e^{(l)}(t)\| &\leqslant \varepsilon\sup_{s\leqslant t}(s^{r/2+l}\|e^{(l)}(s)\|)+\\ &\quad C_\varepsilon\sup_{s\leqslant t}(\sum_{j=-1}^{1}s^{r/2+l+j}\|\rho^{(l+j)}(s)\|+s^{r/2+l-1}\|e^{(l-1)}(s)\|).\end{aligned}$$

因为$\rho^{(q)}=(T_h-T)u_t^{(q+1)}$, 所以

$$s^{r/2+q}\|\rho^{(q)}(s)\|\leqslant Ch^rs^{r/2+q}\|X^{(q+1)}(s)\|_{r-2}\leqslant Ch^r\|u_0\|,$$

由归纳假设, $s^{r/2+l-1}\|e^{(l-1)}(s)\|\leqslant Ch^r\|u_0\|$. 得证. ¶

接下来给出确定性非自伴抛物方程(2.3.22)的有限元半离散格式[式(2.3.23)]的误差估计.

定理 2.3.3 对于误差算子$F_h(t)=E_h(t)P_h-E(t)$, 有

(1) 设$0\leqslant\nu\leqslant\mu\leqslant 2$, 则存在常数$C$使得

$$\|F_h(t)x\|\leqslant Ch^\mu t^{-\frac{\mu-\nu}{2}}\|x\|_\nu,x\in\dot{H}^\nu,\ t>0,h\in(0,1].$$

(2) 设$0\leqslant\rho\leqslant 1$, 则存在常数$C$使得

$$\|F_h(t)x\|\leqslant Ct^{-\frac{\rho}{2}}\|x\|_{-\rho},x\in\dot{H}^{-\rho},\ t>0,h\in(0,1].$$

(3) 设$0 \leqslant \rho \leqslant 1$, 则存在常数$C$使得

$$\|F_h(t)x\| \leqslant Ch^{2-\rho}t^{-1}\|x\|_{-\rho}, x \in \dot{H}^{-\rho},\ t>0, h \in (0,1].$$

证明 定理2.3.3的(1)分$\nu=0, 0 \leqslant \mu \leqslant 2; \nu=\mu;$和$\nu<\mu$三种情况来证明.

当$\nu=\mu=0$时, 由$E_h(t)P_h$和$E(t)$的稳定性有

$$\|F_h(t)x\| \leqslant \|E_h(t)P_hx\| + \|E(t)x\| \leqslant C\|x\|. \tag{2.3.26}$$

由引理2.3.5可得$\nu=0,\ \mu=2$时的结论. 利用内插理论定理1.2.12有

$$\|F_h(t)x\| \leqslant Ch^{\mu}t^{-\mu/2}\|x\|. \tag{2.3.27}$$

由式(2.3.26)和内插理论定理1.2.12得

$$\|F_h(t)x\| \leqslant Ch^{\mu}\|x\|_{\mu},\ 0 \leqslant \mu \leqslant 2. \tag{2.3.28}$$

因此$\nu=\mu$的情况得证.

对于$\nu<\mu$, 设$\{\lambda_m\}_{m=1}^{\infty}$是$A_0$的非减的正的特征值序列, $\{\phi_m\}_{m=1}^{\infty}$是相应的特征函数, 其构成$L_2$上的正交基, 则对于$x \in L_2$有

$$x = \sum_{t\lambda_m}(x,\phi_m)\phi_m = \sum_{t\lambda_m \leqslant 1}(x,\phi_m)\phi_m + \sum_{t\lambda_m>1}(x,\phi_m)\phi_m =: x_I + x_{II}.$$

利用式(2.3.28)和引理2.3.3有

$$\|F_h(t)x_I\|^2 \leqslant Ch^{2\mu}\|x_I\|_{\mu}^2 = Ch^{2\mu}\|A^{\frac{\mu}{2}}x_I\|^2 \leqslant Ch^{2\mu}\|A_0^{\frac{\mu}{2}}x_I\|^2. \tag{2.3.29}$$

此外

$$\|A_0^{\frac{\mu}{2}}x_I\|^2 = \lambda_m^{\mu}\sum_{t\lambda_m \leqslant 1}(x,\phi_m)^2 = t^{-(\mu-\nu)}\sum_{t\lambda_m \leqslant 1}(t\lambda_m)^{\mu-\nu}\lambda_m^{\nu}(x,\phi_m)^2,$$

且

$$\begin{aligned}\sum_{t\lambda_m \leqslant 1}(t\lambda_m)^{\mu-\nu}\lambda_m^{\nu}(x,\phi_m)^2 &\leqslant C\sum_{t\lambda_m \leqslant 1}\lambda_m^{\nu}(x,\phi_m)^2 \leqslant C\sum_{t\lambda_m}\lambda_m^{\nu}(x,\phi_m)^2 \\ &= C\|A_0^{\frac{\nu}{2}}x\|^2 \leqslant C\|A^{\frac{\nu}{2}}x\|^2 = C\|x\|_{\nu}^2.\end{aligned}$$

所以

$$\|F_h(t)x_I\| \leqslant Ch^{\mu}t^{-\frac{\mu-\nu}{2}}\|x\|_{\nu}.$$

对于$F_h(t)x_{II}$, 有

$$\|F_h(t)x_{II}\| \leqslant Ch^{\mu}t^{-\frac{\mu}{2}}\|x\|.$$

此外由引理2.3.3得

$$\|x_{II}\|^2 = \sum_{t\lambda_m>1}t^{\nu}(t\lambda_m)^{-\nu}\lambda_m^{\nu}(x,\phi_m)^2 \leqslant Ct^{\nu}\sum_{t\lambda_m>1}\lambda_m^{\nu}(x,\phi_m)^2$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \quad Ct^{\nu}\sum_{t\lambda_m}\lambda_m^{\nu}(x,\phi_m)^2 = Ct^{\nu}\|A_0^{\frac{\nu}{2}}x\|^2\\
&\leqslant \quad Ct^{\nu}\|A^{\frac{\nu}{2}}x\|^2 = Ct^{\nu}\|x\|_{\nu}^2.
\end{aligned}
$$

因此

$$
\|F_h(t)x_{II}\| \leqslant Ch^{\mu}t^{-\frac{\mu-\nu}{2}}\|x\|_{\nu}.
$$

定理2.3.3的(1)得证.

对于定理2.3.3的(2), 由式(2.3.26)知$\rho=0$时成立, 根据内插理论定理1.2.12, 只需证明$\rho=1$ 时成立即可. 由式(2.1.5)知

$$
\|E(t)x\| = \|A^{\frac{1}{2}}A^{-\frac{1}{2}}E(t)x\| = \|A^{\frac{1}{2}}E(t)A^{-\frac{1}{2}}x\| \leqslant Ct^{-\frac{1}{2}}\|A^{-\frac{1}{2}}x\|. \tag{2.3.30}
$$

利用式(2.3.21)有

$$
\|F_hx\| \leqslant \|E_h(t)P_hx\| + \|E(t)x\| \leqslant Ct^{-\frac{1}{2}}\|A^{-\frac{1}{2}}x\|, x\in \dot{H}^{-1}.
$$

对于定理2.3.3的(3), 在定理2.3.3的(1)中取$\nu=0,\mu=2$可得$\rho=0$时成立. 下面证明$\rho=1$时成立. 利用式(2.3.19)和式(2.3.17)以及式(2.3.1), 得

$$
\begin{aligned}
\|F_h(t)x\| \quad &= \quad \|A_hE_h(t)A_h^{-1}P_hx - AE(t)A^{-1}x\|\\
&\leqslant \quad \|A_hE_h(t)P_h(R_hA^{-1}x - A^{-1}x)\| + \|(A_hE_h(t)P_h - AE(t))A^{-1}x\|\\
&\leqslant \quad Ct^{-1}\|(R_h-I)A^{-1}x\| + \left\|\frac{\mathrm{d}F_h}{\mathrm{d}t}(t)A^{-1}x\right\|\\
&\leqslant \quad Ct^{-1}h\|A^{-1}x\|_1 + \left\|\frac{\mathrm{d}F_h}{\mathrm{d}t}(t)A^{-1}x\right\|.
\end{aligned}
$$

又$\|A^{-1}x\|_1 = \|A^{-\frac{1}{2}}x\|$, 所以

$$
\left\|\frac{\mathrm{d}F_h}{\mathrm{d}t}(t)A^{-1}x\right\| \leqslant Cht^{-1}\|A^{-1}x\|_1.
$$

即$\rho=1$成立, 由内插理论定理1.2.12得证. ¶

以上我们分析了非自伴随机抛物方程[式(2.3.1)]的温和解的正则性以及式(2.3.1)所对应的确定性非自伴抛物方程[式(2.3.22)]的有限元半离散误差估计, 基于这些结论, 下面给出非自伴随机抛物方程[式(2.3.1)]的有限元半离散格式[式(2.3.8)]的误差估计.

定理 2.3.4 设$X_h(t)$和$X(t)$分别是式(2.3.8)和式(2.3.1)的温和解, 假设条件: 假设2.3.1 ~假设2.3.3成立, 则存在常数C, 使得

$$
(E\|X_h(t)-X(t)\|^2)^{\frac{1}{2}} \leqslant Ch^r, r\in[0,1].
$$

若式(2.3.5)成立, $\beta\in[0,1)$, 则有

$$
(E\|X_h(t)-X(t)\|^2)^{\frac{1}{2}} \leqslant Ch^r, \quad r\in[0,1+\beta).
$$

证明 在此只详细地证明第二种情况, 第一种情况证明类似.

$$\begin{aligned} X_h(t)-X(t) &= (E_h(t)P_h-E(t))X_0+ \\ &\quad \int_0^t (E_h(t-s)P_hF(X_h(s))-E(t-s)F(X(s)))\mathrm{d}s+ \\ &\quad \int_0^t (E_h(t-s)P_hG(X_h(s))-E(t-s)G(X(s)))\mathrm{d}W(s) \\ &=: I+II+III. \end{aligned} \tag{2.3.31}$$

则II可表示为

$$\begin{aligned} II &= \int_0^t (E_h(t-s)P_h-E(t-s))F(X(t))\mathrm{d}s+ \\ &\quad \int_0^t (E_h(t-s)P_h-E(t-s))(F(X(s))-F(X(t)))\mathrm{d}s+ \\ &\quad \int_0^t E_h(t-s)P_h(F(X_h(s))-F(X(s)))\mathrm{d}s \\ &=: II_1+II_2+II_3. \end{aligned}$$

类似地, III可表示为下列三部分

$$\begin{aligned} III &= \int_0^t (E_h(t-s)P_h-E(t-s))G(X(t))\mathrm{d}W(s)+ \\ &\quad \int_0^t (E_h(t-s)P_h-E(t-s))\left(G(X(s))-G(X(t))\right)\mathrm{d}W(s)+ \\ &\quad \int_0^t E(t-s)P_h(G(X_h(s))-G(X(s)))\mathrm{d}W(s) \\ &=: III_1+III_2+III_3. \end{aligned}$$

在定理2.3.3(1)中, 取$\mu=\nu=r$得

$$E\|I\|^2 \leqslant Ch^{2r}E\|A^{\frac{r}{2}}X_0\|^2 \leqslant Ch^{2r}. \tag{2.3.32}$$

在定理2.3.3(1)中取$\mu=r$和$\nu=0$, 由定理2.3.1可得II_1的估计, 即

$$\begin{aligned} (E\|II_1\|^2)^{\frac{1}{2}} &\leqslant \int_0^t \left(E\|(E_h(t-s)P_h-E(t-s))F(X(t))\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}s \\ &\leqslant Ch^r\int_0^t (t-s)^{-\frac{r}{2}}\left(E\|F(X(t))\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}s \\ &\leqslant Ch^r. \end{aligned} \tag{2.3.33}$$

对于II_2, 在定理2.3.3(1)中取$\mu=r$和$\nu=0$, 并结合定理2.3.2得

$$\begin{aligned} (E\|II_2\|^2)^{\frac{1}{2}} &\leqslant Ch^r\int_0^t (t-s)^{-\frac{r}{2}}\|X(s)-X(t)\|\mathrm{d}s \\ &\leqslant Ch^r\int_0^t (t-s)^{\frac{1-r}{2}}\mathrm{d}s \leqslant Ch^r. \end{aligned} \tag{2.3.34}$$

利用$E_h(t)$的稳定性和F的Lipschitz条件, 有

$$(E\|II_3\|^2)^{\frac{1}{2}} \leqslant C\int_0^t \left(E\|X_h(s)-X(s)\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}s.$$

利用Itô等距式(1.5.40), 并在定理2.3.3(1)中取$\mu=r$和$\nu=0$, 有

$$\begin{aligned} E\|III_1\|^2 &\leqslant \int_0^t E\|(E_h(t-s)P_h-E(t-s)G(X(t)))\|^2_{L_2^0}\mathrm{d}s \\ &\leqslant Ch^{2r}\int_0^t (t-s)^{-(r-\beta)}E\|A^{\frac{\beta}{2}}G(X(t))\|^2\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

由定理2.3.1得

$$E\|A^{\frac{\beta}{2}}G(X(t))\|^2 \leqslant C(1+E\|X(t)\|^2_\beta) \leqslant C.$$

由此得

$$E\|III_1\|^2 \leqslant Ch^{2r}.$$

类似于II_2和II_3的估计, 有

$$E\|III_2\|^2 \leqslant Ch^{2r},\ (E\|III_3\|^2)^{\frac{1}{2}} \leqslant C\int_0^t \left(E\|X_h(s)-X(s)\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}s.$$

综上,

$$(E\|X_h(t)-X(t)\|^2)^{\frac{1}{2}} \leqslant Ch^r + C\int_0^t (E\|X_h(s)-X(s)\|^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}s.$$

利用Gronwall's引理1.2.3, 得证. ¶

2.3.2 全离散格式的有限元误差估计

这一小节讨论全离散情况的误差估计. 令$k\in(0,1]$表示时间步长, $U^j\in V_h$表示$u(t_j)$在时间节点$t_j=jk$的近似. 则

$$U^j + kA_hU^j = U^{j-1},\ j=1,2,\cdots,\ \ U^0=P_hu_0. \tag{2.3.35}$$

由归纳得

$$U^j = (I+kA_h)^{-j}P_hu_0,\ j=1,2,\cdots. \tag{2.3.36}$$

因为$R(kA_h)=(I+kA_h)^{-1}$, 式(2.3.35)可写为

$$U^j = R(kA_h)^jP_hu_0,\ j=1,2,\cdots. \tag{2.3.37}$$

定义

$$E^j_{kh} =: R(kA_h)^j,\quad t\in[t_{j-1},t_j),\quad j=1,2,\cdots. \tag{2.3.38}$$

类似于式(2.3.17)有

$$\|A_h^{\rho}E_{kh}^{j}x_h\| \leqslant Ct_j^{-\rho}\|x_h\|, \quad j=1,2,\cdots; \quad x_h \in V_h, \tag{2.3.39}$$

其中$C=C(\rho)$是独立于k,h和j的常数. 记

$$F_{kh}(t) =: E_{kh}(t)P_h - E(t),$$

结合式(2.3.39)和式(2.3.20), 得到

$$\begin{aligned} \|E_{kh}(t)P_hx\| &= \|A_h^{\frac{1}{2}}A_h^{-\frac{1}{2}}E_{kh}^{j}P_hx\| \leqslant C\|A_h^{\frac{1}{2}}E_{kh}^{j}A_h^{-\frac{1}{2}}P_hx\| \\ &\leqslant Ct_j^{-\frac{1}{2}}\|x\|_{-1} \leqslant Ct^{-\frac{1}{2}}\|x\|_{-1}. \end{aligned} \tag{2.3.40}$$

基于上述讨论, 首先给出式(2.3.1)相应的确定性非自伴抛物方程[式(2.3.22)]的全离散格式的误差估计.

定理 2.3.5 $F_{kh}(t) =: E_{kh}(t)P_h - E(t)$有如下误差估计.

(1) 设$0 \leqslant \nu \leqslant \mu \leqslant 2$, 则存在常数$C$使得

$$\|F_{kh}(t)x\| \leqslant C(h^{\mu}+k^{\frac{\mu}{2}})t^{-\frac{\mu-\nu}{2}}\|x\|_{\nu}, \forall x \in \dot{H}^{\nu}, t>0, h,k \in (0,1].$$

(2) 设$0 \leqslant \rho \leqslant 1$, 则存在常数$C$使得

$$\|F_{kh}(t)x\| \leqslant Ct^{-\frac{\rho}{2}}\|x\|_{-\rho}, \forall x \in \dot{H}^{-\rho}, t>0, h,k \in (0,1].$$

证明 分三种情况: $\nu=0, 0 \leqslant \mu \leqslant 2$; $\nu=\mu$和$\nu<\mu$来证明定理2.3.5的(1).
$\mu=\nu=0$时显然成立. $\nu=0$, $\mu=2$时由文献[17]中的定理8.2且利用内插定理1.2.12有

$$\|F_{kh}(t)x\| \leqslant C(h^{\mu}+k^{\frac{\mu}{2}})t^{-\frac{\mu}{2}}\|x\|.$$

当$\mu=\nu$时, 所要证的式子为

$$\|F_{kh}(t)x\| \leqslant C(h^{\mu}+k^{\frac{\mu}{2}})\|x\|_{\mu}. \tag{2.3.41}$$

设$\theta^n = U^n - R_hu(t_n)$, $\partial_tU^n = \frac{U^n-U^{n-1}}{k}$, 则

$$\partial_t\theta^n + A_h\theta^n = \frac{U^n-U^{n-1}}{k} - \frac{R_h(U^n-U^{n-1})}{k} + A_hU^n - A_hR_hu(t_n) =: \rho_1^n + \rho_2^n,$$

其中

$$\begin{aligned} \rho_1^n &= P_h\frac{\mathrm{d}u(t_n)}{\mathrm{d}t} - \frac{P_hu(t_n)-P_hu(t_{n-1})}{k}, \\ \rho_2^n &= \frac{P_h(u(t_n)-R_hu(t_n)) - P_h(u(t_{n-1})-R_hu(t_{n-1}))}{k}. \end{aligned}$$

因此

$$\theta^n = E_{kh}^nP_h\theta^0 + \sum_{j=1}^{n}kE_{kh}^{n-j+1}\rho_1^j + \sum_{j=1}^{n}kE_{kh}^{n-j+1}\rho_2^j =: \widehat{\rho}_0 + \widehat{\rho}_1 + \widehat{\rho}_2.$$

利用P_h和R_h的性质, $\widehat{\rho}_0$的估计很容易得到.

$$\begin{aligned}\widehat{\rho}_1 &= \sum_{j=1}^{n} E_{kh}^{n-j+1} P_h \int_{t_{j-1}}^{t_j} E(s)(I-E(t_j-s))Au_0\mathrm{d}s\\ &= \sum_{j=1}^{n} E_{kh}^{n-j+1} A_h^{\frac{1}{2}} A_h^{-\frac{1}{2}} P_h A^{\frac{1}{2}} \int_{t_{j-1}}^{t_j} E(s)A^{\frac{1}{2}}A^{-1}(I-E(t_j-s))Au_0\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

利用式(2.1.5)和式(2.1.6)有

$$\|\widehat{\rho}_1\| \leqslant Ck^2 \sum_{j=1}^{n} t_{n-j+1}^{-\frac{1}{2}} \int_{t_{j-1}}^{t_j} s^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}s\|Au_0\|.$$

而

$$k\sum_{j=1}^{n} t_{n-j+1}^{-\frac{1}{2}} \int_{t_{j-1}}^{t_j} s^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}s \leqslant \sum_{j=1}^{n} Ct_{n-j+1}^{-\frac{1}{2}}\frac{k^2}{t_j^{\frac{1}{2}}} \leqslant Cnk \leqslant C,$$

所以

$$\|\widehat{\rho}_1\| \leqslant Ck\|Au_0\| \leqslant Ck\|u_0\|_2. \tag{2.3.42}$$

$$\begin{aligned}\widehat{\rho}_2 &= \sum_{j=1}^{n} E_{kh}^{n-j+1} P_h \int_{t_{j-1}}^{t_j} (I-R_h)E(s)Au_0\mathrm{d}s\\ &= \sum_{j=1}^{n} E_{kh}^{n-j+1} A_h^{\frac{1}{2}} A_h^{-\frac{1}{2}} P_h A^{\frac{1}{2}} \int_{t_{j-1}}^{t_j} A^{-\frac{1}{2}}(I-R_h)A^{-\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}E(s)Au_0\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

由文献[10]中的定理5.1, 有

$$\|A^{-\frac{1}{2}}(I-R_h)A^{-\frac{1}{2}}\| \leqslant Ch^2. \tag{2.3.43}$$

由引理2.1.2得

$$\|\widehat{\rho}_2\| \leqslant Ch^2\|Au_0\| = Ch^2\|u_0\|_2. \tag{2.3.44}$$

结合式(2.3.42)得

$$\|\theta^n\| \leqslant C(h^2+k)\|u_0\|_2.$$

利用三角不等式和R_h的性质, $\nu=\mu=2$时得证.

对于$\nu<\mu$, 可以参阅定理2.3.5的详细证明.

定理2.3.5中(2)的证明相对容易些. $\rho=0$时利用$E_{kh}(t)$和$E(t)$的稳定性质显然成立.

$$\|F_{kh}(t)x\| \leqslant \|E_{kh}(t)P_hx\| + \|E(t)x\| \leqslant Ct^{-\frac{1}{2}}\|x\|_{-1}.$$

由式(2.3.40)得$\rho=1$时成立. 证毕. ¶

类似于2.3.1节半离散的情况, 对于非自伴随机抛物方程有限元全离散格式[式(2.3.10)]的误差估计, 有如下定理成立.

定理 2.3.6 设$X(t)$是方程(2.3.1)的温和解, X_h^n由式(2.3.10)给出, 假设条件: 假设2.3.1 ~假设2.3.3成立, 步长$k,h\in(0,1]$. 则存在常数C, 使得

$$\left(E\|X_h^n-X(t_n)\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant C(h^r+k^{\frac{r}{2}}),\quad r\in[0,1),n=1,2,\cdots.$$

若式(2.3.5)成立, $\beta\in[0,1)$, 则有

$$\left(E\|X_h^n-X(t_n)\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant C(h^r+k^{\frac{1}{2}}),\quad r\in[0,1+\beta).$$

证明 记$E_{kh}^n=R(kA_h)^n,t\in[t_{n-1},t_n)$,

$$\begin{aligned}X_h^n &= E_{kh}^nP_hX_0+\sum_{j=1}^n\int_{t_{j-1}}^{t_j}E_{kh}^{n-j+1}P_hF(X_h^{j-1})\mathrm{d}s+\\ &\quad \sum_{j=1}^n\int_{t_{j-1}}^{t_j}E_{kh}^{n-j+1}P_hG(X_h^{j-1})\mathrm{d}W(s).\end{aligned}$$

当$t_n=nk$时, 式(2.3.1)的温和解为

$$\begin{aligned}X(t_n) &= E(t_n)X_0+\int_0^{t_n}E(t_n-s)F(X(s))\mathrm{d}s+\\ &\quad \int_0^{t_n}E(t_n-s)G(X(s))\mathrm{d}W(s).\end{aligned}$$

记$e^n=X_h^n-X(t_n)$和$F_{kh}^n=E_{kh}^nP_h-E(t_n)$,

$$\begin{aligned}e^n &= F_{kh}^nX_0+\sum_{j=1}^n\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left(E_{kh}^{n-j+1}P_hF(X_h^{j-1})-E(t_n-s)F(X(s))\right)\mathrm{d}s+\\ &\quad \sum_{j=1}^n\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left(E_{kh}^{n-j+1}P_hG(X_h^{j-1})-E(t_n-s)G(X(s))\right)\mathrm{d}W(s)\\ &=: I+II+III.\end{aligned}$$

在定理2.3.5中取$\mu=\nu=r$, 得

$$(E\|I\|^2)^{\frac{1}{2}}\leqslant C(k^{\frac{r}{2}}+h^r)\left(E\|A^{\frac{r}{2}}X_0\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant C(k^{\frac{r}{2}}+h^r).$$

$$\begin{aligned}II &= \sum_{j=1}^n\int_{t_{j-1}}^{t_j}E_{kh}^{n-j+1}P_h\left(F(X_h^{j-1})-F\left(X(t_{j-1})\right)\right)\mathrm{d}s+\\ &\quad \sum_{j=1}^n\int_{t_{j-1}}^{t_j}E_{kh}^{n-j+1}P_h\left(F(X_{t_{j-1}})-F(X(s))\right)\mathrm{d}s+\\ &\quad \sum_{j=1}^n\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left(E_{kh}^{n-j+1}P_h-E(t_n-t_{j-1})\right)F(X(s))\mathrm{d}s+\\ &\quad \sum_{j=1}^n\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left(E(t_n-t_{j-1})-E(t_n-s)\right)F(X(s))\mathrm{d}s\end{aligned}$$

$$=: \quad II_1 + II_2 + II_3 + II_4.$$

接下来对每一项分别进行估计. 在式(2.3.39)中取$\rho = 0$, 应用E_{kh}^n的稳定性得

$$\begin{aligned} E\|II_1\|^2 &\leqslant C\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j} E\|E_{kh}^{n-j+1}P_h(F(X_h^{j-1}) - F(X(t_{j-1})))\|^2 \mathrm{d}s \\ &\leqslant Ck\sum_{j=1}^{n} E\|X_h^{j-1} - X(t_{j-1})\|^2. \end{aligned}$$

对于II_2,

$$\begin{aligned} (E\|II_2\|^2)^{\frac{1}{2}} &\leqslant C\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left(E\|E_{kh}^{n-j+1}P_h(F(X(t_{j-1})) - F(X(s)))\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}s \\ &\leqslant Cnk\left(E\|X(t_{j-1})) - X(\zeta))\|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \zeta \in [t_{j-1}, t_{j-1}]. \end{aligned}$$

利用定理2.3.2, 得

$$\left(E\|X(t_{j-1})) - X(\zeta))\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant Ck^{\frac{1}{2}}.$$

因此有

$$(E\|II_2\|^2)^{\frac{1}{2}} \leqslant Ck^{\frac{1}{2}}nk \leqslant Ck^{\frac{1}{2}}.$$

对于II_3, 在定理2.3.5中取$\mu = r$和$\nu = 0$,

$$\begin{aligned} (E\|II_3\|^2)^{\frac{1}{2}} &\leqslant \sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left(E\|F_{kh}^{n-j+1}F(X(s))\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}s \\ &\leqslant C\left(h^r + k^{\frac{r}{2}}\right)k\sum_{j=1}^{n}(t_n - t_{j-1})^{-\frac{r}{2}} \\ &\leqslant C\left(h^r + k^{\frac{r}{2}}\right)\int_0^{t_n} s^{-\frac{r}{2}}\mathrm{d}s \leqslant C(h^r + k^{\frac{r}{2}}). \end{aligned} \tag{2.3.45}$$

对于II_4, 应用引理2.1.2得

$$\begin{aligned} \left(E\|II_4\|^2\right)^{\frac{1}{2}} &\leqslant \sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left(E\|A^{\frac{1}{2}}E(t_n - t_{j+1})A^{-\frac{1}{2}}(I - E(t_{j-1} - s))F(X(s))\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}s \\ &\leqslant C\sum_{j=1}^{n}(t_n - t_{j-1})^{-\frac{1}{2}}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(t_{j-1} - s)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}s \\ &\leqslant Ck^{\frac{3}{2}}\sum_{j=1}^{n}(t_n - t_{j-1})^{-\frac{1}{2}} \leqslant Ck^{\frac{1}{2}}\int_0^{t_n} s^{-\frac{1}{2}}ds \leqslant Ck^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

对于III的估计类似于II, 有

$$\begin{aligned} III = &\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j} E_{kh}^{n-j+1}P_h\left(G(X_h^{j-1}) - G(X(t_{j-1}))\right)\mathrm{d}W(s) + \\ &\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j} E_{kh}^{n-j+1}P_h\left(G(X_{t_{j-1}}) - G(X(s))\right)\mathrm{d}W(s) + \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left(E_{kh}^{n-j+1}P_h - E(t_n-t_{j-1})\right)G(X(s))\mathrm{d}W(s) + \\
& \sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left(E(t_n-t_{j-1}) - E(t_n-s)\right)G(X(s))\mathrm{d}W(s) \\
=: \quad & III_1 + III_2 + III_3 + III_4.
\end{aligned}
$$

应用Itô等距式(1.5.40)和E_{kh}^n的稳定性得

$$
\begin{aligned}
E\|III_1\|^2 \quad & \leqslant \quad C\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j} E\left\|X_h^{j-1} - X(t_{j-1})\right\|^2 \mathrm{d}s \\
& \leqslant \quad Ck\sum_{j=1}^{n} E\left\|X_h^{j-1} - X(t_{j-1})\right\|^2.
\end{aligned}
$$

对于III_2, 有

$$
E\|III_2\|^2 \leqslant C\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j} E\|X(t_{j-1}) - X(s)\|^2 \mathrm{d}s \leqslant Ck.
$$

应用定理2.3.1得

$$
E\|III_3\|^2 \leqslant C(k^r + h^{2r}).
$$

对于III_4, 有

$$
\begin{aligned}
& (E\|III_4\|^2)^{\frac{1}{2}} \\
\leqslant \quad & \sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left(E\|A^{\frac{1-\beta}{2}}E(t_n-t_{j-1})A^{-\frac{1}{2}}(I - E(t_{j-1}-s))A^{\frac{\beta}{2}}G(X(s))\|_{L_2^0}^2\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}s \\
\leqslant \quad & C\sum_{j=1}^{n}(t_n-t_{j-1})^{-\frac{1-\beta}{2}}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(s-t_{j-1})^{\frac{1}{2}}(1 + E\|X(s)\|_{\beta})\mathrm{d}s \\
\leqslant \quad & Ck^{\frac{3}{2}}\sum_{j=1}^{n}(t_n-t_{j-1})^{-\frac{1-\beta}{2}}\mathrm{d}s \leqslant Ck^{\frac{1}{2}}\int_{0}^{t_n} s^{-\frac{1-\beta}{2}}\mathrm{d}s \leqslant Ck^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

结合I, II和III, 得

$$
E\|e^n\|^2 \leqslant C(k + h^{2r}) + Ck\sum_{j=1}^{n} E\|e^j\|^2.
$$

由离散的Gronwall's引理1.2.3得

$$
\left(E\|X_h^n - X(t_n)\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant C(k^{\frac{1}{2}} + h^r).
$$

证毕. ¶

注 2.3.1 在文献[28]中, 作者采用随机指数积分方法研究了二阶半线性随机抛物方程有限元方法, 并在L^2范数下给出了收敛性证明.在文献[29]的例2.22中, 作者把非自伴算子分成两部分, 其中一部分转化为自伴算子, 而另一部分归入到非线性项进行处理,从而将非自伴算子随机抛物方程转化为含有自伴算子的非线性随机抛物方程. 在本节中, 我们采用不同的处理方式, 即通过建立非自伴算子与自伴算子所定义范数之间的一种等价关系, 将非自伴算子抛物方程的有限元估计转化成自伴算子抛物方程的有限元分析, 进而得到非自伴算子随机抛物方程的有限元误差估计, 并且得到了更高的误差估计精度.

2.4 研究进展评述

随机抛物方程有限元方法研究已经很成熟, 下面就研究进展做一介绍.

(1) 在文献[18]中, E. J. Allen用差分法和有限元法研究了如下两类带有白噪声的线性随机抛物方程

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)+bu(t,x)=\frac{\partial^2 W}{\partial t\partial x}(t,x)+g(t,x), \qquad t>0, \qquad (2.4.1)\\
&u(0,x)=u_0(x), \qquad 0\leqslant x\leqslant 1,\\
&u(t,0)=u(t,1)=0, \qquad t\geqslant 0,
\end{aligned}$$

和线性随机椭圆方程

$$\begin{aligned}
&-\Delta u(x)+bu(x)=g(x)+\dot{W}(x), 0<x<1, \qquad (2.4.2)\\
&u(0)=u(1)=0,
\end{aligned}$$

的数值解. 为了便于利用有限元法进行收敛证明, 白噪声过程用分段常数随机过程近似代替. 利用两种数值方法分别得到了误差估计, 试验证明这两种方法具有相似的准确率, 但相比而言, 有限元法具有更高的效率.

(2) 在文献[19]中, J. B. Walsh研究了如下带有白噪声的随机抛物方程的数值方法

$$\begin{cases}
\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+f(U)\dot{W}+g(U), \qquad (x,t)\in[0,L]\times[0,+\infty),\\
U(x,0)=u_0(x), \qquad x\in[0,L],\\
U(0,t)=U(L,t)=0, \qquad t\geqslant 0.
\end{cases} \tag{2.4.3}$$

空间上利用有限元, 时间上分别采用了向前、向后Euler格式和Crank-Nicholson方法, 并发现当时间步长k和空间步长h的平方一致时, 此时的收敛率和差分法类似, 上述所有方法收敛到$h^{1/2}+k^{1/4}$并且达到最优. 同时考虑了k比h^2大时, 只有向后Euler格式可以达到最佳收敛

率, 其他方法虽然稳定, 但如果时间步长太大与空间步长不相关的话, 都不能收敛到真实解. 其中, 利用Crank-Nicholson方法得到的收敛率最差.

(3) 在文献[20]中, Q. Du研究了含有噪声项的一维线性随机抛物方程的有限元方法, 方程如下

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + bu(t,x) = \frac{\partial^2 W}{\partial t \partial x}(t,x) + g(t,x), \qquad t>0, \\ u(0,x) = u_0(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, \qquad t \geqslant 0. \end{cases} \tag{2.4.4}$$

Q. Du指出随机偏微分方程数值方法的困难性在于噪声项的处理. 首先将噪声正则化, 则式(2.4.4)便转化为了正则性更高的方程, 然后利用Green函数随机积分求出原方程和正则化方程之间的误差, 再利用经典有限元误差估计的方法得到有限元问题和正则性方程两者之间的误差.

(4) 在文献[21]中, T. K. Georgios, E. Z. Georgios研究了如下

$$\begin{cases} \partial_t u + \Delta^2 u = \dot{W}(t,x) \ \ \forall (t,x) \in (0,T] \times \mathcal{D} \\ (\Delta)^m u(t,.)|_{\partial \mathcal{D}} = 0 \ \ \forall t \in (0,T], m = 0,1, \\ u(0,x) = 0 \ \ \forall x \in \mathcal{D}, \end{cases} \tag{2.4.5}$$

带有Brnwnian片白噪声的四阶随机抛物方程. 首先对随机抛物方程进行正则化处理, 然后再对正则化随机方程进行有限元研究. 空间上采用标准的Galerkin方法, 时间上采用向后Euler格式, 得到了正则化问题的先验估计和近似误差.

(5) 在文献[22]中, G. J. Lord, A. Tambue考虑了如下

$$\mathrm{d}X = (AX + F(X))\mathrm{d}t + \mathrm{d}W; X(0) = X_0; t \in [0;T]; T > 0$$

随机抛物方程的有限元近似. 在时间上引入了Euler-Maruyama新方法, 给出了更好的收敛性质. 空间上采用有限元方法, 并对反应扩散方程给出了L_2范数下的误差估计. 对于对流项给出了H_1范数下的误差估计.

(6) 在文献[23]中, B. Andrea研究了

$$\mathrm{d}X(t) = AX(t)\mathrm{d}t + G(X(t))\mathrm{d}M(t), X(t_0) = X_0,$$

随机方程的近似解, 其中$M(t)$是定义在概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}, P)$上的平方可积矩, 给出了半离散和全离散的误差估计.

(7) 在文献[24]中, A. Jentzen等研究了

$$\begin{cases} \mathrm{d}u(t) = [\Delta u(t) + f(u(t),t)]\mathrm{d}t + g(u(t),t)\mathrm{d}W(t), & (x,t) \in \mathcal{D} \times [0,T] \\ u(0) = u_0, & x \in \mathcal{D} \\ u(t,x) = 0, & (x,t) \in \partial\mathcal{D} \times [0,T], \end{cases} \tag{2.4.6}$$

带有可乘噪声的随机抛物方程的温和解在时间和空间上的正则性.

(8) 在文献[25]中, P. E. Kloeden考虑如下

$$\mathrm{d}u(t) = [-Au(t) + F(u(t))]\mathrm{d}t + \mathrm{d}W(t), t \geqslant 0, \tag{2.4.7}$$

半线性随机方程在d维空间中的分段近似的误差分析, 其中初值$u(0) = u_0$. 空间上离散采用Galerkin方法, 时间上利用随机指数积分法, 并指出随着噪声项正则性的降低，收敛率也降低.

(9) 在文献[26]中, M. Kov$\acute{a}$cs等研究了如下

$$\mathrm{d}X(t) + AX(t)\mathrm{d}t = f(X(t))\mathrm{d}t + \mathrm{d}W(t), t > 0; X(0) = X_0,$$

带有白噪声的半线性随机抛物方程. 空间上通过标准的分段线性有限元方法进行离散. 只要Wiener过程的协方差算子的核足够光滑, 取Wiener过程正交展开的截断项则仍保持有限元的收敛阶数. 因此可以简化相应线性代数问题的规模, 降低计算复杂度，这是随机问题模拟时很关键的一个问题.

(10) 在文献[27]中, R. Kruse考虑了方程

$$\mathrm{d}X(t) + [AX(t) + f(X(t))]\mathrm{d}t \quad = \quad g(X(t))\mathrm{d}W(t), 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{2.4.8}$$

其中初值$X(0) = X_0$. 基于方程解在时间和空间上最佳正则性[15, 24], 给出了方程在时间和空间上有限元误差的最佳收敛精度.

(11) 在文献[28]中, J. G. Lord研究了如下抛物方程

$$\mathrm{d}X(t) = (AX(t) + F(X(t)))\mathrm{d}t + B(X)\mathrm{d}W, X(0) = X_0, t \in [0, T], T > 0$$

的有限元方法, 其中A为更一般算子(不必自伴). 在空间方向上采用了有限元离散, 在时间方向上使用了随机指数积分法.

(12) 在文献[30]中, A. Debussche等研究了如下

$$\mathrm{d}X_t + AX_t\mathrm{d}t = Q^{1/2}\mathrm{d}W_t, X_0 = x \in H, t \in [0, T],$$

随机偏微分方程的弱收敛误差估计. 空间上采用有限元, 时间上采用隐式Euler格式进行离散, 得到弱收敛阶是强收敛的两倍.

(13) 在文献[31]中, M. Geissert考虑如下

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}X - \Delta X\mathrm{d}t = \mathrm{d}W, \quad (x, t) \in \mathcal{D} \times \mathbb{R}^+, \\ &X = 0, \quad (x, t) \in \partial\mathcal{D} \times \mathbb{R}^+, \\ &X(\cdot, 0) = X_0, \quad x \in \mathcal{D}, \end{aligned} \tag{2.4.9}$$

由可加噪声驱动的随机热方程. 空间上采用标准的有限元方法进行离散并发现弱收敛率是强收敛的两倍.

(14) 在文献[32]中, A. Debussche考虑如下

$$\begin{aligned}&\frac{\partial X}{\partial t}=X_{\xi\xi}+f(X)+\sigma(X)\dot{\eta},\quad \xi\in I,\quad t>0,\\&X(a,t)=X(b,t)=0,t>0,\\&X(\xi,0)=x(\xi),\xi\in I,\end{aligned}\tag{2.4.10}$$

在有界区域$I=(a,b)\subset\mathbb{R}$上的非线性热方程的弱近似. 关键是利用Malliavin微积分摒弃非正则的误差项, 证明了弱收敛的阶数是强收敛的两倍.

(15) 在文献[33]中, A. Andersson研究了如下

$$\mathrm{d}X(t)+[AX(t)-f(X(t)]\mathrm{d}t=g(X(t))\mathrm{d}W(t),t\in(0,T];X(0)=X_0,$$

非线性随机热方程的空间半离散的弱收敛. 该方程仅在一维空间上有解, 为了得到更高维数上的解, 考虑了有色噪声.

(16) 在文献[34]中, M. Kovacs考虑如下

$$\mathrm{d}X(t)+AX(t)\mathrm{d}t=B\mathrm{d}W(t),t>0;X(0)=X_0,$$

线性随机发展方程的有限元近似的弱收敛. 空间上采用标准的连续有限元方法进行离散, 时间上通过I-stable有理近似应用到指数函数进行离散.

(17) 在文献[35]中, F. Lindner考虑如下

$$\mathrm{d}X_t+AX_t\mathrm{d}t=Q^{1/2}\mathrm{d}Z_t,X_0=x\in H,t\in[0,T],$$

由Poisson噪声驱动的随机热方程的弱收敛.

(18) 在文献[36]中, X. Wang在时间上采用线性隐式Euler格式, 分析了如下半线性随机偏微分方程半离散的弱误差.

$$\mathrm{d}X(t)=(AX(t)+F(X))\mathrm{d}t+\mathrm{d}W^Q(t),\quad 0\leqslant t\leqslant T,\tag{2.4.11}$$

其中初值$X(0)=x\in H$. 主要结果揭示了弱阶数是如何依赖于噪声的正则性, 并指出弱收敛的阶数是强收敛阶数的两倍.

(19) 在文献[37]中, X. Wang在时间上采用指数Euler格式, 研究了如下

$$\mathrm{d}X(t)=AX(t)\mathrm{d}t+F(X(t))\mathrm{d}t+B\mathrm{d}W(t),\quad X(0)=X_0\in H,\quad t\in(0,T],\tag{2.4.12}$$

半线性随机偏微分方程的半离散弱误差估计.

第3章　随机Navier-Stokes方程的有限元分析与后验误差估计

本章主要对经典的随机Navier-Stokes方程进行有限元分析和后验误差估计, 并重点介绍后验误差估计. 有限元的后验误差估计是在精确解信息未知的情况下, 用只依赖于已知的初边值和已得到的离散解的显式量来估计实际误差. 根据上一次网格的计算结果进行误差估计来指示下一步的网格划分, 从而指导有限元自适应网格加密, 使有限元网格分布更加合理, 提高解的计算效率并获得预期的精度要求.

3.1　方程的理论分析

本节对随机Navier-Stokes方程的理论结果进行综述, 给出方程解的存在性定理, 并推导出随机发展方程温和解的表达形式.

设$\mathcal{D}\in\mathbb{R}^2$为有界$L$型区域, 其边界$\partial\mathcal{D}$光滑. 考虑如下的黏性非定常不可压随机Navier-Stokes方程

$$\begin{cases}\partial_t u-\nu\Delta u+(u\cdot\nabla)u+\nabla p=G(u)\dot{W},\ x\in\mathcal{D},\ t\in[0,T],\\ \nabla\cdot u=0,\ u(0,x)=u_0(x),\ u|_{\partial\mathcal{D}}=0,\end{cases}\tag{3.1.1}$$

其中$u(x,t)$和$p(x,t)$为未知随机函数, 分别表示黏性不可压流体中的速度和压力. 常数$\nu>0$表示流体的黏性系数. 符号$\dot{W}$表示定义在概率空间$(\varOmega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0},P)$上的Wiener过程$W(t)$的时间导数, 这里表示白噪声.

设$\{X(t,\omega),t\geqslant 0\}$是一个$L_2^0$值的随机过程, 由定理1.5.9, 要使随机积分$\int_0^t X(s)\mathrm{d}W(s)$有意义, X需要满足如下假设条件.

假设 3.1.1 设$\{X(t,\omega),t\geqslant 0\}$是一个$L_2^0$值的随机过程, 满足以下条件.

(1) $X(t,\omega)\in L_2^0$;

(2) $X(t,\omega)$关于$[0,T]\times\varOmega$可测;

(3) 对于$\forall t\geqslant 0$, $X(t,\cdot)$关于$\mathcal{F}_t$可测;

(4) 对于$\forall t\geqslant 0$, $\int_0^T E\left\|X(t,\omega)\right\|_{L_2^0}^2\mathrm{d}t<\infty$, $E\left\|X(t,\omega)\right\|_{L_2^0}^2<\infty$.

为使方程(3.1.1)存在唯一温和解, 对噪声项的系数G加上以下条件.

假设 3.1.2 设函数$G:L^2(\mathcal{D})\to L_2^0$是可测的, 满足假设3.1.1, 且满足如下的广义Lipschitz条件和有界条件:

(1) $\|G(u)-G(v)\| \leqslant C_1\|u-v\|,\ \forall u, v \in L^2(\mathcal{D})$;

(2) $\|G(u)\| \leqslant C_2\|u\|,\ \forall u \in L^2(\mathcal{D})$.

设初始条件$u(0,x)=u_0(0)$满足假设3.1.1. 考虑随机Navier-Stokes方程(3.1.1)的变分问题: 对$\forall t \in [0,T]$, 随机过程$u(t)$满足假设3.1.1, 且对$\forall v \in C_0^{\infty}(\mathcal{D})$和$\nabla \cdot v=0$, 满足

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{D}} u(t) v \mathrm{d}x+\nu \int_0^t \int_{\mathcal{D}} \nabla u(s) \nabla v \mathrm{d}x \mathrm{d}s+\int_0^t \int_{\mathcal{D}}(u(s) \cdot \nabla u(s)) v \mathrm{d}x \mathrm{d}s \\
= &\int_{\mathcal{D}} u(0) v \mathrm{d}x+\int_{\mathcal{D}} \int_0^t G(u(s)) \mathrm{d}W \cdot v \mathrm{d}x. \qquad (3.1.2)
\end{aligned}$$

根据上述的假设和说明, M. Capinski和S. Peszat在文献[38]中证明了弱解[式(3.1.2)]的存在性. 随后, Jose A. Langa等在文献[39]中证明了随机Navier-Stokes方程(3.1.1)从μ开始的鞅解的存在性.

定理 3.1.1 集合$\{(\Omega,\mathcal{F},P),(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]},W,u,p\}$称为方程(3.1.1)从$\mu$开始的鞅解, 如果下述条件满足:

(1) $(\Omega,\mathcal{F},P)$是概率空间, $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$是右连续的$\sigma$-域流, H是可分的Hilbert空间;

(2) W是H值的$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$适应的Wiener过程;

(3) μ是H上的概率测度, 对$\forall r \in [1,\infty)$, 有$\int_H \|v\|_H^r \mathrm{d}\mu(v)<\infty$;

(4) $P\{u(0)\in B\}=\mu(B)$, $\forall B \in \mathcal{B}(H)$, $\mathcal{B}(\cdot)$是Borel域;

(5) $u \in L^r(\Omega,\mathcal{F},P;L^{\infty}(0,T;H))$ $(\forall r \in [1,\infty))$, $p \in L^1(\Omega,\mathcal{F},P;W^{-1,\infty}(0,t;L^2(\mathcal{D})))$.

同时该集合中的元素还几乎处处满足

$$\begin{cases}
\partial_t u-\nu \Delta u+(u \cdot \nabla) u+\nabla p=G(u) \dot{W},\ x \in \mathcal{D},\ t \in [0,T], \\
\nabla \cdot u=0,\ x \in \mathcal{D},\ t \in [0,T], \\
\int_{\mathcal{D}} p \mathrm{d}x=0,\ x \in \mathcal{D}.
\end{cases}$$

那么方程(3.1.1)存在从μ开始的鞅解$\{(\Omega,\mathcal{F},P),(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]},W,u,p\}$.

由于$\nabla \cdot u=0$, 我们考虑利用Helmholtz分解(任何向量场都可以分解为两个势场, 标量势和向量势之和)处理随机方程(3.1.1). 令$\phi \in C_{0,\sigma}^{\infty}(\mathcal{D})$表示满足$\nabla \cdot \phi=0$和$\phi \in C_0^{\infty}(\mathcal{D})$的函数$\phi$. H_σ表示$\phi \in C_{0,\sigma}^{\infty}(\mathcal{D})$在$H$中的闭包. 令$P_{\mathrm{div}}$表示Helmholtz分解中的正交投影算子, 则算子P_{div}可以被扩展到$H^s(\mathcal{D})\,(s \in (-\infty,\infty))$空间: 存在常数$C_P>0$使得对所有$v \in H^s(\mathcal{D})$都有

$$\|P_{\mathrm{div}} v\|_s \leqslant C_P\|v\|_s.$$

定义空间H_σ中的自伴算子$Au=-\nu P_{\rm div}\Delta u$, 令$B(u,v)=P_{\rm div}(u\cdot\nabla)v$. $H^1_{0,\sigma}(\mathcal{D})$表示满足$\nabla\cdot\phi=0$和$\phi\in H^1_0(\mathcal{D})$的函数$\phi$的集合. 算子$A$是严格为正的. $Au=w$当且仅当

$$(\nabla u,\nabla v)=(w,v),\ \forall\, v\in H^1_{0,\sigma}(\mathcal{D}).$$

显然有$D(A^{1/2})=H^1_{0,\sigma}(\mathcal{D})$, 且有$\|A^{1/2}u\|=\|\nabla u\|$. 算子$B$显然满足$(B(u,v),v)=0$. 为简化处理, 我们用$G(u)$表示$P_{\rm div}G(u)$. 那么将正交投影算子$P_{\rm div}$作用到方程(3.1.1)中第一个等式的两边, 可以得到如下的随机发展方程

$$\partial_t u+Au+B(u,u)=G(u)\dot{W}. \tag{3.1.3}$$

令$E(t)=\mathrm{e}^{-tA}\ (t\geqslant 0)$表示由算子$A$生成的半群. 那么发展方程(3.1.3)的温和解为

$$u(t)=E(t)u_0+\int_0^t E(t-s)G(u)\mathrm{d}W-\int_0^t E(t-s)B(u,u)\mathrm{d}s. \tag{3.1.4}$$

3.2 有限元误差估计

本节利用Crank-Nicolson差分方法, 对方程的时间变量进行离散, 构建时间上的半离散格式, 并对半离散逼近解和精确解之间的误差进行分析和证明. 用有限元方法对空间进行离散, 采用向后Euler法对时间进行离散, 构建基于有限元方法的半离散格式和全离散格式, 并就全离散格式进行误差分析和证明, 得到关于时间步长和空间步长的收敛阶.

3.2.1 时间半离散格式的误差估计

本节中, 若不做特殊说明, c和C一般表示正的常数, $C(u)$表示与u有关的正的常数, 不等式$f\lesssim g$表示存在与f,g无关的常数$C>0$使得$f\leqslant Cg$.

首先对时间区间$[0,T]$进行离散. 对于$0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{N-1}<t_N=T$, 设$\tau$为时间步长, $t_n=n\tau$, $I_n=[t_{n-1},t_n]$, $n=1,2,\cdots,N$. 对于随机发展方程(3.1.3), 使用Crank-Nicolson差分方法, 可以得到一组$u^n(n=1,2,\cdots)$满足半离散格式

$$\frac{u^n-u^{n-1}}{\tau}+A\frac{u^n+u^{n-1}}{2}+B\left(u^{n-1},\frac{u^{n-1}+u^n}{2}\right)=\frac{1}{\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\frac{G(u^n)+G(u^{n-1})}{2}\mathrm{d}W. \tag{3.2.1}$$

由式(3.2.1)定义的u^n满足以下有界性.

引理 3.2.1 *设$u(t_n)$和u^n分别是式(3.1.3)和式(3.2.1)的解, τ表示时间步长. 若*

$$\sup_{s\in[0,T]}\|G(u(s))\|_{L_2(\mathcal{D};H)}<+\infty,$$

则存在常数

$$C=C\left(G,\|u_0\|_{L_2(\mathcal{D};H)},\sup_{s\in[0,T]}\|G(u(s))\|_{L_2(\mathcal{D};H)}\right)>0,$$

使得

$$\begin{aligned}
&\|u^n\|_{L_2(\mathcal{D};H)}^2+\frac{\tau}{4}\sum_{j=1}^{n}\left\|\nabla(u^j+u^{j-1})\right\|_{L_2(\mathcal{D};H)}^2\\
\leqslant\ \ & C\left(G,\|u_0\|_{L_2(\mathcal{D};H)},\sup_{s\in[0,T]}\|G(u(s))\|_{L_2(\mathcal{D};H)}\right). \qquad (3.2.2)
\end{aligned}$$

证明 利用$(u^n+u^{n-1})/2$对半离散格式(3.2.1)两边做内积可得

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{u^n-u^{n-1}}{\tau},\frac{u^n+u^{n-1}}{2}\right)+\left(A\frac{u^n+u^{n-1}}{2},\frac{u^n+u^{n-1}}{2}\right)+\\
&\left(B\left(u^{n-1},\frac{u^n+u^{n-1}}{2}\right),\frac{u^n+u^{n-1}}{2}\right)\\
=\ \ &\left(\frac{1}{\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\frac{G(u^n)+G(u^{n-1})}{2}\mathrm{d}W,\frac{u^n+u^{n-1}}{2}\right). \qquad (3.2.3)
\end{aligned}$$

分析式(3.2.3)的左边, 对于第一项有

$$\left(\frac{u^n-u^{n-1}}{\tau},\frac{u^n+u^{n-1}}{2}\right)=\frac{1}{2\tau}\left(\|u^n\|^2-\|u^{n-1}\|^2\right). \qquad (3.2.4)$$

根据算子A的定义有

$$\left(A\frac{u^n+u^{n-1}}{2},\frac{u^n+u^{n-1}}{2}\right)=\left\|\nabla\left(\frac{u^n+u^{n-1}}{2}\right)\right\|^2\geqslant 0. \qquad (3.2.5)$$

再考虑到$(B(u,v),v)=0$, 显然有

$$\left(B\left(u^{n-1},\frac{u^n+u^{n-1}}{2}\right),\frac{u^n+u^{n-1}}{2}\right)=0. \qquad (3.2.6)$$

对式(3.2.3)的右边有

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\frac{G(u^n)+G(u^{n-1})}{2}\mathrm{d}W,\frac{u^n+u^{n-1}}{2}\right)\\
\leqslant\ \ & C\left\|G(u^n)+G(u^{n-1})\right\|_{-1}^2+\frac{1}{2}\left\|\nabla\left(\frac{u^n+u^{n-1}}{2}\right)\right\|^2. \qquad (3.2.7)
\end{aligned}$$

将估计式(3.2.4), 式(3.2.5), 式(3.2.6)和式(3.2.7)分别代入到式(3.2.3)的两边可以得到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\tau}\left(\|u^n\|^2-\|u^{n-1}\|^2\right)+\frac{1}{4}\left\|\nabla(u^n+u^{n-1})\right\|^2\\
\leqslant\ \ & C\left\|G(u^n)+G(u^{n-1})\right\|_{-1}^2+\frac{1}{2}\left\|\nabla\left(\frac{u^n+u^{n-1}}{2}\right)\right\|^2,
\end{aligned}$$

即有

$$\|u^n\|^2+\frac{\tau}{4}\left\|\nabla(u^n+u^{n-1})\right\|^2\ \ \leqslant\ \ 2\tau C\left\|G(u^n)+G(u^{n-1})\right\|_{-1}^2+\|u^{n-1}\|^2. \qquad (3.2.8)$$

在式(3.2.8)的两边同时取期望, 并从$j=1$到$j=n$求和, 有

$$\begin{aligned}
& \|u^n\|^2_{L_2(\mathcal{D};H)} + \frac{\tau}{4}\sum_{j=1}^{n}\left\|\nabla(u^j+u^{j-1})\right\|^2_{L_2(\mathcal{D};H)} \\
\leqslant\ & \|u_0\|^2_{L_2(\mathcal{D};H)} + C(G)\sup_{0\leqslant s\leqslant T}\|G(u(s))\|^2_{L_2(\mathcal{D};H)},
\end{aligned}$$

即有

$$\begin{aligned}
& \|u^n\|^2_{L_2(\mathcal{D};H)} + \frac{\tau}{4}\sum_{j=1}^{n}\left\|\nabla(u^j+u^{j-1})\right\|^2_{L_2(\mathcal{D};H)} \\
\leqslant\ & C\left(G, \|u_0\|_{L_2(\mathcal{D};H)}, \sup_{0\leqslant s\leqslant T}\|G(u(s))\|_{L_2(\mathcal{D};H)}\right).
\end{aligned}$$

证毕. ¶

由方程(3.1.4)和式(3.2.1)分别可以得到

$$\begin{aligned}
u(t_n) &= E(t_n)u_0 - \int_0^{t_n} E(t_n-s)B(u(s),u(s))\mathrm{d}s + \\
&\quad \int_0^{t_n} E(t_n-s)G(u(s))\mathrm{d}W,
\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

和

$$\begin{aligned}
u^n &= E_\tau^n u_0 - \sum_{j=1}^{n} E_\tau^{n-j}\frac{\tau}{I+\frac{\tau}{2}A}B\left(u^{j-1}, \frac{u^j+u^{j-1}}{2}\right) + \\
&\quad \sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j} E_\tau^{n-j}\left(I+\frac{\tau}{2}A\right)^{-1}\frac{G(u^j)+G(u^{j-1})}{2}\mathrm{d}W.
\end{aligned} \tag{3.2.10}$$

其中I表示恒等算子, E_τ^n表示E_τ的n次幂,

$$E(t)=\mathrm{e}^{-tA}, \quad E_\tau = \frac{I-\frac{\tau}{2}A}{I+\frac{\tau}{2}A}.$$

根据式(3.2.9)和式(3.2.10)定义误差$e^n=u^n-u(t_n)$, 将误差e^n分成三部分进行处理:

$$e^n = I_1 + I_2 + I_3, \tag{3.2.11}$$

其中

$$\begin{aligned}
I_1 &= \left[E_\tau^n - E(t_n)\right]u_0, \\
I_2 &= \int_0^{t_n} E(t_n-s)B(u(s),u(s))\mathrm{d}s - \sum_{j=1}^{n}E_\tau^{n-j}\frac{\tau}{I+\frac{\tau}{2}A}B\left(u^{j-1},\frac{u^j+u^{j-1}}{2}\right), \\
I_3 &= \sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}E_\tau^{n-j}\left(I+\frac{\tau}{2}A\right)^{-1}\frac{G(u^j)+G(u^{j-1})}{2}\mathrm{d}W - \int_0^{t_n}E(t_n-s)G(u(s))\mathrm{d}W.
\end{aligned}$$

其中I_1和I_2的处理方法类似于对应的确定性方程的情况, 含有随机项的部分I_3用特殊方法处理. 对这三部分误差, 将分别进行分析和证明. 在进行这些证明之前, 首先给出关于时间正则性的引理.

引理 3.2.2 设$u(t)$是式(3.1.3)的温和解. 若 $\sup\limits_{s\in[0,T]} E\|u(s)\| < +\infty$, 则对任意的$t_1, t_2 \in [0,T]$, 存在常数$C\left(\sup\limits_{s\in[0,T]} E\|u(s)\|\right) > 0$, 使得

$$E\|u(t_1) - u(t_2)\|_{L_2(\Omega;H)} \leqslant C\left(\sup_{s\in[0,T]} E\|u(s)\|\right)(t_1 - t_2)^{\gamma},$$

其中$0 \leqslant \gamma < 1$.

下面对半离散格式[式(3.2.1)]进行误差估计, 得到如下结论.

定理 3.2.1 设$u(t_n)$和u^n分别是式(3.1.3)和式(3.2.1)的解, τ为时间步长. 若

$$\sup_{s\in[0,T]} E\|\nabla u(s)\| < +\infty,$$

那么存在常数$C\left(T, G, \sup\limits_{s\in[0,T]} E\|\nabla u(s)\|\right) > 0$, 使得对于$\forall t \in [0,T]$都有

$$\|u^n - u(t_n)\|_{L_2(\mathcal{D};H)} \leqslant C\left(T, G, \sup_{s\in[0,T]} E\|\nabla u(s)\|\right)\tau^{\min\{\gamma,1/2\}}. \tag{3.2.12}$$

其中$0 \leqslant \gamma < 1$.

在证明定理3.2.1之前, 下面分别对I_1, I_2, I_3进行误差估计.

引理 3.2.3 I_1的定义如式(3.2.11)所示, 初值u_0满足假设3.1.1中的条件, τ表示时间步长, 则存在常数$C = C\left(T, \|u_0\|_{L_2(\mathcal{D};H)}\right) > 0$, 使得对$\forall t \in [0,T]$都有

$$\|I_1\|_{L_2(\mathcal{D};H)} \leqslant C\left(T, \|u_0\|_{L_2(\mathcal{D};H)}\right)\tau^2.$$

证明 对于I_1有

$$\begin{aligned}\|I_1\|^2_{L_2(\mathcal{D};H)} &= \|[E^n_\tau - E(t_n)]u_0\|^2_{L_2(\mathcal{D};H)} = E\left\|[E^n_\tau - E(t_n)]u_0\right\|^2 \\ &= E\left\|\left[\left(\frac{I - \frac{\tau}{2}A}{I + \frac{\tau}{2}A}\right)^n - \mathrm{e}^{-t_n A}\right]u_0\right\|^2.\end{aligned}$$

容易证明

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{\mathrm{e}^{-t_n A} - \left(\frac{I - \frac{\tau}{2}A}{I + \frac{\tau}{2}A}\right)^n}{\tau^2} = \frac{1}{12}\mathrm{e}^{-t_n A} t_n A^3, \tag{3.2.13}$$

那么对足够小的τ, 存在常数$C(T) > 0$使得

$$\|I_1\|^2_{L_2(\mathcal{D};H)} \leqslant E\|C(T)\tau^2 u_0\|^2 \leqslant C(T)\tau^4\|u_0\|^2_{L_2(\mathcal{D};H)},$$

即有

$$\|I_1\|_{L_2(\mathcal{D};H)} \leqslant C\left(T, \|u_0\|_{L_2(\mathcal{D};H)}\right)\tau^2.$$

证毕. ¶

引理 3.2.4 I_2和e^j的定义如式(3.2.11)所示, τ表示时间步长, 若 $\sup\limits_{s\in[0,T]} E\|\nabla u(s)\| < +\infty$, 则存在常数$C=C\left(T, \sup\limits_{s\in[0,T]} E\|\nabla u(s)\|\right)>0$, 使得对$\forall t\in[0,T]$都有

$$\|I_2\|^2_{L_2(\mathcal{D};H)} \leqslant C\left(T, \sup_{s\in[0,T]} E\|\nabla u(s)\|\right)\left(\tau^{2\gamma}+\tau^2\sum_{j=1}^{n} E\|e^j\|^2\right). \tag{3.2.14}$$

其中$0\leqslant\gamma<1$.

证明 对于I_2有

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^{t_n} E(t_n-s)B(u(s),u(s))\mathrm{d}s-\sum_{j=1}^{n} E_\tau^{n-j}\frac{\tau}{I+\frac{\tau}{2}A}B\left(u^{j-1},\frac{u^j+u^{j-1}}{2}\right)\\
&= \left[\int_0^{t_n} E(t_n-s)B(u(s),u(s))\mathrm{d}s-\right.\\
&\quad \left.\sum_{j=1}^{n} E_\tau^{n-j+1}\left(I-\frac{\tau}{2}A\right)^{-1}\tau B\left(u(t_{j-1}),\frac{u(t_j)+u(t_{j-1})}{2}\right)\right]+\\
&\quad \left[\sum_{j=1}^{n} E_\tau^{n-j+1}\left(I-\frac{\tau}{2}A\right)^{-1}\tau B\left(u(t_{j-1}),\frac{u(t_j)+u(t_{j-1})}{2}\right)-\right.\\
&\quad \left.\sum_{j=1}^{n} E_\tau^{n-j+1}\left(I-\frac{\tau}{2}A\right)^{-1}\tau B\left(u^{j-1},\frac{u^j+u^{j-1}}{2}\right)\right]\\
&= I_{2,1}+I_{2,2}.
\end{aligned}$$

其中, 对于$I_{2,1}$有

$$\begin{aligned}
&I_{2,1}\\
=\ & \frac{1}{2}\left[\int_0^{t_n} E(t_n-s)B(u(s),u(s))\ \mathrm{d}s-\right.\\
& \left.\sum_{j=1}^{n} E_\tau^{n-j+1}\left(I-\frac{\tau}{2}A\right)^{-1}\tau B\left(u(t_{j-1}),u(t_j)\right)\right]+\\
& \frac{1}{2}\left[\int_0^{t_n} E(t_n-s)B(u(s),u(s))\mathrm{d}s-\right.\\
& \left.\sum_{j=1}^{n} E_\tau^{n-j+1}\left(I-\frac{\tau}{2}A\right)^{-1}\tau B\left(u(t_{j-1}),u(t_{j-1})\right)\right]\\
=\ & \frac{1}{2}\left(I_{2,1,1}+I_{2,1,2}\right).
\end{aligned}$$

这里只对$I_{2,1,1}$进行分析, $I_{2,1,2}$和$I_{2,1,1}$的分析方法类似. $I_{2,1,1}$可以整理得到

$$I_{2,1,1} = \int_0^{t_n} E(t_n-s)\left[B(u(s),u(s))-B(u(t_n),u(t_n))\right]\mathrm{d}s-$$

$$
\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{n} E_{\tau}^{n-j+1}\left(I-\frac{\tau}{2} A\right)^{-1} \tau\left[B(u(t_{j-1}), u(t_j))-B(u(t_n), u(t_n))\right]+ \\
& \int_0^{t_n}\left[E(t_n-s) \mathrm{d} s-\sum_{j=1}^{n} E_{\tau}^{n-j+1}\left(I-\frac{\tau}{2} A\right)^{-1} \tau\right] B(u(t_n), u(t_n)) \\
= & \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j}\left[E(t_n-s)-E(t_n-t_{j-1})\right]\left[B(u(s), u(s))-B(u(t_n), u(t_n))\right] \mathrm{d} s+ \\
& \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} E(t_n-t_{j-1})\left[B(u(s), u(s))-B(u(t_{j-1}), u(t_j))\right] \mathrm{d} s+ \\
& \sum_{j=1}^{n}\left[E(t_n-t_{j-1})-\frac{E_{\tau}^{n-j+1}}{I-\frac{\tau}{2} A}\right] \tau\left[B(u(t_{j-1}), u(t_j))-B(u(t_n), u(t_n))\right]+ \\
& \int_0^{t_n}\left[E(t_n-s) \mathrm{d} s-\sum_{j=1}^{n} E_{\tau}^{n-j+1}\left(I-\frac{\tau}{2} A\right)^{-1} \tau\right] B(u(t_n), u(t_n)) \\
= & I_{2,1,1,a}+I_{2,1,1,b}+I_{2,1,1,c}+I_{2,1,1,d} .
\end{aligned} \tag{3.2.15}
$$

首先考虑等式(3.2.15)中的第一项$I_{2,1,1,a}$. 由于$E(t)=\mathrm{e}^{-tA}$, 对于$s \in [t_{j-1}, t_j]$有

$$
\begin{aligned}
& E(t_n-s)-E(t_n-t_{j-1})=\mathrm{e}^{-(t_n-s) A}-\mathrm{e}^{-(t_n-t_{j-1}) A} \\
= & \mathrm{e}^{-(t_n-s) A}(I-\mathrm{e}^{-(s-t_{j-1}) A})=E(t_n-s)\left(I-E(s-t_{j-1})\right) .
\end{aligned} \tag{3.2.16}
$$

其中$\|E(t_n-s)\| \leqslant 1$, 且对足够小的$\tau>0$, 存在常数$C_\tau>0$使得

$$
\|I-\mathrm{e}^{-(s-t_{j-1}) A}\| \leqslant\|I-\mathrm{e}^{-(t_j-t_{j-1}) A}\|=\|I-\mathrm{e}^{-\tau A}\| \leqslant\|C_{\tau} \tau\| . \tag{3.2.17}
$$

对于算子$B(\cdot,\cdot)$, 由引理3.2.2, 对$0 \leqslant \gamma<1$有

$$
\begin{aligned}
& \|B(u(s), u(s))-B(u(t_n), u(t_n))\| \\
\leqslant & \|B(u(s), u(s))-B(u(t_n), u(s))\|+\|B(u(t_n), u(s))-B(u(t_n), u(t_n))\| \\
= & \|B(u(s)-u(t_n), u(s))\|+\|B(u(t_n), u(s)-u(t_n))\| \\
\leqslant & \|u(s)-u(t_n)\| \cdot \sup_{s \in[0, T]}\|\nabla u(s)\|+\sup_{s \in[0, T]}\|u(s)\| \cdot\|\nabla(u(s)-u(t_n))\| \\
\leqslant & C\left(\sup_{s \in[0, T]}\|\nabla u(s)\|\right)(s-t_n)^{\gamma} .
\end{aligned} \tag{3.2.18}
$$

此时根据估计式(3.2.16), 式(3.2.17)和式(3.2.18), 可以得到$I_{2,1,1,a}$的误差估计:

$$
\begin{aligned}
& \|I_{2,1,1,a}\|_{L_2(\mathcal{D}; H)}^2 \\
= & \left\|\sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j}\left[E(t_n-s)-E(t_n-t_{j-1})\right]\left[B(u(s), u(s))-B(u(t_n), u(t_n))\right] \mathrm{d} s\right\|_{L_2(\mathcal{D}; H)}^2 \\
= & E\left\|\sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j}[E(t_n-s)-E(t_n-t_{j-1})][B(u(s), u(s))-B(u(t_n), u(t_n))] \mathrm{d} s\right\|^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j} E\left\|E(t_n-s)\left(I-E(s-t_{j-1})\right)\left[B(u(s),u(s))-B(u(t_n),u(t_n))\right]\right\|^2 \mathrm{d}s \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j} C_\tau^2\tau^2\cdot E\left\|C\left(\sup_{s\in[0,T]}\|\nabla u(s)\|,\ \sup_{0\leqslant s\leqslant T}\|u(s)\|\right)(s-t_n)^\gamma\right\|^2 \ \mathrm{d}s \\
&\leqslant C\left(T,\sup_{s\in[0,T]}\|\nabla u(s)\|\right)\tau^2\left(\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(s-t_n)^{2\gamma}\mathrm{d}s\right) \\
&\leqslant C\left(T,\sup_{s\in[0,T]}\|\nabla u(s)\|\right)\tau^2\left(\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\tau^{2\gamma}\mathrm{d}s\right) \\
&\leqslant C\left(T,\sup_{s\in[0,T]}\|\nabla u(s)\|\right)\tau^{2+2\gamma}. \qquad (3.2.19)
\end{aligned}
$$

下面对等式(3.2.15)中的第二项$I_{2,1,1,b}$进行估计.

$$
\begin{aligned}
I_{2,1,1,b} &= \sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j} E(t_n-t_{j-1})[B(u(s),u(s))-B(u(t_{j-1}),u(t_j))]\ \mathrm{d}s \\
&= \int_0^\tau E(t_n)B(u(s),u(s))\mathrm{d}s - E(t_n)\tau B(u(t_0),u(t_1)) + \\
&\quad \sum_{j=2}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j} E(t_n-t_{j-1})B(u(s)-u(t_{j-1}),u(s))\ \mathrm{d}s + \\
&\quad \sum_{j=2}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j} E(t_n-t_{j-1})B(u(t_{j-1},u(s)-u(t_j))\ \mathrm{d}s. \qquad (3.2.20)
\end{aligned}
$$

由

$$
\|E(t_n)B(u(s),u(s))\|\leqslant\|B(u(s),u(s))\|\leqslant\|u(s)\|\cdot\|\nabla u(s)\|\leqslant C\left(\sup_{s\in[0,T]}\|\nabla u(s)\|\right),
$$

有

$$
\left\|\int_0^\tau E(t_n)B(u(s),u(s))\mathrm{d}s\right\|^2\leqslant C\left(\sup_{s\in[0,T]}\|\nabla u(s)\|\right)\tau^2.
$$

类似地有

$$
\|E(t_n)B(u(s),u(s))\tau\|^2\leqslant\|B(u(s),u(s))\tau\|^2\leqslant C\left(\sup_{s\in[0,T]}\|\nabla u(s)\|\right)\tau^2.
$$

那么根据上述的两个不等式可以得到等式(3.2.20)中第一项的估计

$$
\left\|\int_0^\tau E(t_n)B(u(s),u(s))\mathrm{d}s - E(t_n)\tau B(u_0,u_1)ds\right\|^2_{L_2(\mathcal{D};H)}\leqslant C\left(\sup_{s\in[0,T]}\|\nabla u(s)\|\right)\tau^2.
$$

等式(3.2.20)中的后两项可以类似地进行处理.

$$
\left\|\sum_{j=2}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j} E(t_n-t_{j-1})B(u(s)-u(t_{j-1}),u(s))\mathrm{d}s\right\|^2_{L_2(\mathcal{D};H)}
$$

$$
\begin{aligned}
&= E\left\|\sum_{j=2}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j} E(t_n-t_{j-1})B(u(s)-u(t_{j-1}),u(s))\mathrm{d}s\right\|^2\\
&\leqslant \sum_{j=2}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j} E\left\|E(t_n-t_{j-1})B(u(s)-u(t_{j-1}),u(s))\right\|^2\mathrm{d}s\\
&\leqslant C\left(\sup_{s\in[0,T]}E\|u(s)\|\right)\sum_{j=2}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(s-t_{j-1})^{2\gamma}\mathrm{d}s\\
&\leqslant C\left(\sup_{s\in[0,T]}E\|u(s)\|\right)\tau^{2\gamma}.
\end{aligned}
$$

类似地,

$$
\left\|\sum_{j=2}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j} E(t_n-t_{j-1})B(u(t_{j-1},u(s)-u(t_j))\mathrm{d}s\right\|^2_{L_2(\mathcal{D};H)}\leqslant C\left(\sup_{s\in[0,T]}E\|u(s)\|\right)\tau^{2\gamma}.
$$

综上所述, $I_{2,1,1,b}$的估计为

$$
\|I_{2,1,1,b}\|^2_{L_2(\mathcal{D};H)}\leqslant C\left(T,\sup_{s\in[0,T]}E\|\nabla u(s)\|\right)\tau^{2\gamma}. \tag{3.2.21}
$$

等式(3.2.15)中的第三项$I_{2,1,1,c}$可以仿照式(3.2.20)的估计进行类似的处理.

$$
\begin{aligned}
&I_{2,1,1,c}\\
&= \sum_{j=1}^{n}\left[E(t_n-t_{j-1})-E_\tau^{n-j+1}\left(I-\frac{\tau}{2}A\right)^{-1}\right]\tau\left[B(u(t_{j-1}),u(t_j))-B(u(t_n),u(t_n))\right]\\
&= \left[E(t_n)-E_\tau^{n}\left(I-\frac{\tau}{2}A\right)^{-1}\right]\tau\left[B(u(t_0),u(t_1))-B(u(t_n),u(t_n))\right]+\\
&\quad \sum_{j=2}^{n}\left[E(t_n-t_{j-1})-E_\tau^{n-j+1}\left(I-\frac{\tau}{2}A\right)^{-1}\right]\tau B(u(t_{j-1})-u(t_n),u(t_j))+\\
&\quad \sum_{j=2}^{n}\left[E(t_n-t_{j-1})-E_\tau^{n-j+1}\left(I-\frac{\tau}{2}A\right)^{-1}\right]\tau B(u(t_n),u(t_j)-u(t_n)).
\end{aligned}
$$

$I_{2,1,1,c}$中的每一项都可以做如下推导:

$$
\begin{aligned}
&\left\|\left(E(t_n)-E_\tau^{n}\left(I-\frac{\tau}{2}A\right)^{-1}\right)\tau\left[B(u(t_0),u(t_1))-B(u(t_n),u(t_n))\right]\right\|^2_{L_2(\mathcal{D};H)}\\
&= E\left\|\left(E(t_n)-E_\tau^{n}\left(I-\frac{\tau}{2}A\right)^{-1}\right)\tau\left[B(u(t_0),u(t_1))-B(u(t_n),u(t_n))\right]\right\|^2\\
&\leqslant C\left(T,\sup_{0\leqslant s\leqslant T}E\|u(s)\|\right)\tau^2,
\end{aligned}
$$

同时有

$$
\left\|\sum_{j=2}^{n}\left[E(t_n-t_{j-1})-E_\tau^{n-j+1}\left(I-\frac{\tau}{2}A\right)^{-1}\right]\tau B(u(t_{j-1})-u(t_n),u(t_j))\right\|^2_{L_2(\mathcal{D};H)}
$$

$$
\begin{aligned}
&= E\left\|\sum_{j=2}^{n}\left[E(t_n-t_{j-1})-E_\tau^{n-j+1}(I-\frac{\tau}{2}A)^{-1}\right]\tau B\left(u(t_{j-1})-u(t_n),u(t_j)\right)\right\|^2\\
&\leqslant \tau^2\sum_{j=2}^{n}\left[E(t_n-t_{j-1})-E_\tau^{n-j+1}\left(I-\frac{\tau}{2}A\right)^{-1}\right]\cdot E\left\|B(u(t_{j-1})-u(t_n),u(t_j))\right\|^2\\
&\leqslant C(T)\tau^2\cdot E\left\|B(u(t_{j-1})-u(t_n),u(t_j))\right\|^2\\
&\leqslant C\left(T,\sup_{s\in[0,T]}E\|u(s)\|\right)\tau^2.
\end{aligned}
$$

这样我们得到了$I_{2,1,1,c}$的估计:

$$
\|I_{2,1,1,c}\|_{L_2(\mathcal{D};H)}\leqslant C\left(T,\sup_{s\in[0,T]}E\|u(s)\|\right)\tau^2. \tag{3.2.22}
$$

对于等式(3.2.15)中的第四项$I_{2,1,1,d}$, 容易证明

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{t_n}E(t_n-s)\mathrm{d}s=\int_0^{t_n}\mathrm{e}^{-(t_n-s)A}\ \mathrm{d}s=\mathrm{e}^{-t_nA}\int_0^{t_n}\mathrm{e}^{sA}\mathrm{d}s\\
=\ &\mathrm{e}^{-t_nA}\left(A^{-1}\mathrm{e}^{t_nA}-A^{-1}\right)=\left(I-E(t_n)\right)A^{-1},
\end{aligned}
$$

和

$$
\sum_{j=1}^{n}E_\tau^{n-j+1}\left(I-\frac{\tau}{2}A\right)^{-1}\tau=\frac{E_\tau-E_\tau^{n+1}}{I-E_\tau}\left(I-\frac{\tau}{2}A\right)^{-1}\tau=\left(I-E_\tau^n\right)A^{-1}.
$$

则有

$$
\begin{aligned}
&\|I_{2,1,1,d}\|^2_{L_2(\mathcal{D};H)}\\
=\ &\left\|\left[\int_0^{t_n}E(t_n-s)\ \mathrm{d}s-\sum_{j=1}^{n}E_\tau^{n-j+1}(I-\frac{\tau}{2}A)^{-1}\tau\right]B(u(t_n),u(t_n))\right\|^2_{L_2(\mathcal{D};H)}\\
=\ &E\left\|\left[E_\tau^n-E(t_n)\right]A^{-1}B(u(t_n),u(t_n))\right\|^2\\
\leqslant\ &C\left(T,\sup_{s\in[0,T]}E\|\nabla u(s)\|^2\right)\tau^2.
\end{aligned} \tag{3.2.23}
$$

根据估计式(3.2.19), 式(3.2.21), 式(3.2.22)和式(3.2.23), 可以得到

$$
\|I_{2,1,1}\|_{L_2(\mathcal{D};H)}\leqslant C\left(T,\sup_{s\in[0,T]}E\|\nabla u(s)\|\right)\tau^{2\gamma}.
$$

类似地, 对于$I_{2,1,2}$也有同样地结论,

$$
\|I_{2,1,2}\|_{L_2(\mathcal{D};H)}\leqslant C\left(T,\sup_{s\in[0,T]}E\|\nabla u(s)\|\right)\tau^{2\gamma}.
$$

那么, 对$I_{2,1}$有

$$
\|I_{2,1}\|_{L_2(\mathcal{D};H)}\leqslant C\left(T,\sup_{s\in[0,T]}E\|\nabla u(s)\|\right)\tau^{2\gamma}. \tag{3.2.24}
$$

下面对$I_{2,2}$进行估计.

$$
\begin{aligned}
I_{2,2} &= \sum_{j=1}^{n} E_\tau^{n-j+1}\left(I-\frac{\tau}{2}A\right)^{-1}\tau B\left(u(t_{j-1}),\frac{u(t_j)+u(t_{j-1})}{2}\right)- \\
&\quad \sum_{j=1}^{n} E_\tau^{n-j+1}\left(I-\frac{\tau}{2}A\right)^{-1}\tau B\left(u^{j-1},\frac{u^j+u^{j-1}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2I-\tau A}\left[\sum_{j=1}^{n} E_\tau^{n-j+1}\tau B(u(t_{j-1}),u(t_j))-\sum_{j=1}^{n} E_\tau^{n-j+1}\tau B(u^{j-1},u^j)\right]+ \\
&\quad \frac{1}{2I-\tau A}\left[\sum_{j=1}^{n} E_\tau^{n-j+1}\tau B(u(t_{j-1}),u(t_{j-1}))-\sum_{j=1}^{n} E_\tau^{n-j+1}\tau B(u^{j-1},u^{j-1})\right] \\
&= \frac{1}{2I-\tau A}\left(I_{2,2,1}+I_{2,2,2}\right).
\end{aligned}
$$

同样地, 下面只需考虑$I_{2,2,1}$的估计式

$$
\begin{aligned}
I_{2,2,1} &= \sum_{j=1}^{n} E_\tau^{n-j+1}\tau B(u(t_{j-1}),u(t_j))-\sum_{j=1}^{n} E_\tau^{n-j+1}\tau B(u^{j-1},u^j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} E_\tau^{n-j+1}\tau\left[B(u(t_{j-1}),u(t_j))-B(u^{j-1},u^j)\right] \\
&= \sum_{j=1}^{n} E_\tau^{n-j+1}\tau B(u(t_{j-1})-u^{j-1},u(t_j))+\sum_{j=1}^{n} E_\tau^{n-j+1}\tau B(u^{j-1},u(t_j)-u^j) \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} E_\tau^{n-j}\tau B(u(t_j)-u^j,u(t_{j+1}))+\sum_{j=1}^{n-1} E_\tau^{n-j+1}\tau B(u^{j-1},u(t_j)-u^j)+ \\
&\quad E_\tau\tau B(u^{n-1},u(t_n)-u^n) \\
&= I_{2,2,1,a}+I_{2,2,1,b}+I_{2,2,1,c}.
\end{aligned}
$$

对于$I_{2,2,1,a}$有如下的估计, $I_{2,2,1,b}$和$I_{2,2,1,c}$的处理方法类似.

$$
\begin{aligned}
&\left\|\sum_{j=1}^{n-1} E_\tau^{n-j}\tau B(u(t_j)-u^j,u(t_{j+1}))\right\|_{L_2(\mathcal{D};H)}^2 \\
=\ & E\left\|\sum_{j=1}^{n-1} E_\tau^{n-j}\tau B(u(t_j)-u^j,u(t_{j+1}))\right\|^2 \\
\leqslant\ & C(T)\tau^2\cdot\sum_{j=1}^{n-1} E\left\|B(u(t_j)-u^j,u(t_{j+1}))\right\|^2 \\
\leqslant\ & C(T)\tau^2\cdot\sum_{j=1}^{n-1} E\|u(t_j)-u^j\|^2\|\nabla u(t_{j+1})\|^2 \\
\leqslant\ & C\left(T,\sup_{s\in[0,T]}E\|\nabla u(s)\|\right)\tau^2\sum_{j=1}^{n-1} E\|e^j\|^2.
\end{aligned}
$$

则有

$$\|I_{2,2,1}\|^2_{L_2(\mathcal{D};H)} \leqslant C\left(T, \sup_{s\in[0,T]} E\|\nabla u(s)\|\right)\tau^2\sum_{j=1}^n E\|e^j\|^2.$$

那么对于$I_{2,2}$有

$$\|I_{2,2}\|^2_{L_2(\mathcal{D};H)} \leqslant C\left(T, \sup_{s\in[0,T]} E\|\nabla u(s)\|\right)\tau^2\sum_{j=1}^n E\|e^j\|^2. \tag{3.2.25}$$

综上所述, 由估计式(3.2.24)和式(3.2.25)可得

$$\|I_2\|^2_{L_2(\mathcal{D};H)} \leqslant C\left(T, \sup_{s\in[0,T]} E\|\nabla u(s)\|\right)\left(\tau^{2\gamma}+\tau^2\sum_{j=1}^n E\|e^j\|^2\right).$$

证毕. ¶

对于I_3, 有如下误差估计.

引理 3.2.5 I_3和e^j的定义如式(3.2.11)所示, τ表示时间步长, 则存在常数$C(G)>0$使得

$$\|I_3\|^2_{L_2(\mathcal{D};H)} \leqslant C(G)\left(\tau^{2\gamma}+\tau\sum_{j=1}^n E\|e^j\|^2\right), \tag{3.2.26}$$

其中$0\leqslant\gamma<1$.

证明 对于I_3有

$$\begin{aligned}
I_3 \quad &= \sum_{j=1}^n\int_{t_{j-1}}^{t_j} E_\tau^{n-j}\left(I+\frac{\tau}{2}A\right)^{-1}\frac{G(u^j)+G(u^{j-1})}{2}\mathrm{d}W - \int_0^{t_n} E(t_n-s)G(u(s))\mathrm{d}W \\
&= \frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^n\int_{t_{j-1}}^{t_j} E_\tau^{n-j}\left(I+\frac{\tau}{2}A\right)^{-1}G(u^{j-1})\mathrm{d}W - \int_0^{t_n} E(t_n-s)G(u(s))\mathrm{d}W\right]+ \\
&\quad\ \frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^n\int_{t_{j-1}}^{t_j} E_\tau^{n-j}\left(I+\frac{\tau}{2}A\right)^{-1}G(u^{j})\mathrm{d}W - \int_0^{t_n} E(t_n-s)G(u(s))\mathrm{d}W\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(I_{3,1}+I_{3,2}\right).
\end{aligned} \tag{3.2.27}$$

鉴于$I_{3,1}$和$I_{3,2}$的估计方法类似, 这里只考虑$I_{3,1}$, 将其分成四部分分别进行误差估计.

$$\begin{aligned}
I_{3,1} \quad &= \sum_{j=1}^n\int_{t_{j-1}}^{t_j} E_\tau^{n-j+1}\left(I-\frac{\tau}{2}A\right)^{-1}G(u^{j-1})\ \mathrm{d}W(s) - \int_0^{t_n} E(t_n-s)G(u(s))\mathrm{d}W \\
&= \sum_{j=1}^n\int_{t_{j-1}}^{t_j} E_\tau^{n-j+1}\left(I-\frac{\tau}{2}A\right)^{-1}\left[G(u^{j-1})-G(u(t_{j-1}))\right]\mathrm{d}W+ \\
&\quad\ \sum_{j=1}^n\int_{t_{j-1}}^{t_j} E_\tau^{n-j+1}\left(I-\frac{\tau}{2}A\right)^{-1}\left[G(u(t_{j-1}))-G(u(s))\right]\mathrm{d}W+
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left[E_\tau^{n-j+1} \left(I - \frac{\tau}{2} A \right)^{-1} - E(t_n - t_{j-1}) \right] G(u(s)) \mathrm{d}W + \\
& \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left[E(t_n - t_{j-1}) - E(t_n - s) \right] G(u(s)) \mathrm{d}W \\
= \; & I_{3,1,1} + I_{3,1,2} + I_{3,1,3} + I_{3,1,4}.
\end{aligned} \tag{3.2.28}
$$

根据Itô等距式(1.5.40), $E_\tau^{n-j+1} \leqslant 1$和$\left(I - \frac{\tau}{2} A\right)^{-1} \leqslant 1$, 可知对$I_{3,1,1}$有

$$
\begin{aligned}
\|I_{3,1,1}\|_{L_2(\mathcal{D};H)}^2 &= E \left\| \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} E_\tau^{n-j+1} \left(I - \frac{\tau}{2} A \right)^{-1} \left[G(u^{j-1}) - G(u(t_{j-1})) \right] \mathrm{d}W \right\|^2 \\
&= \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} E \left\| E_\tau^{n-j+1} \left(I - \frac{\tau}{2} A \right)^{-1} \left[G(u^{j-1}) - G(u(t_{j-1})) \right] \right\|^2 \mathrm{d}s \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} E \left\| G(u^{j-1}) - G(u(t_{j-1})) \right\|^2 \mathrm{d}s \\
&\leqslant C(G) \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} E \|u^{j-1} - u(t_{j-1})\|^2 \mathrm{d}s \\
&= C(G) \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} E \left\| e^{j-1} \right\|^2 \mathrm{d}s \leqslant C(G) \tau \sum_{j=1}^{n} E \|e^j\|^2.
\end{aligned} \tag{3.2.29}
$$

类似地, 根据引理3.2.2, 对$I_{3,1,2}$有

$$
\begin{aligned}
\|I_{3,1,2}\|_{L_2(\mathcal{D};H)}^2 &= E \left\| \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} E_\tau^{n-j+1} \left(I - \frac{\tau}{2} A \right)^{-1} \left[G(u(t_{j-1})) - G(u(s)) \right] \mathrm{d}W \right\|^2 \\
&= \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} E \left\| E_\tau^{n-j+1} \left(I - \frac{\tau}{2} A \right)^{-1} \left[G(u(t_{j-1})) - G(u(s)) \right] \right\|^2 \mathrm{d}s \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} E \left\| G(u(t_{j-1})) - G(u(s)) \right\|^2 \mathrm{d}s \\
&\leqslant C(G) \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} E \left\| u(t_{j-1}) - u(s) \right\|^2 \mathrm{d}s \\
&\leqslant C(G) \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (s - t_{j-1})^{2\gamma} \mathrm{d}s \leqslant C(G) \tau^{2\gamma}.
\end{aligned} \tag{3.2.30}
$$

对于$I_{3,1,3}$和$I_{3,1,4}$, 主要关注算子$E(t)$和E_τ的处理. 对每个$j = 1, 2, \cdots, n$, 根据式(3.2.13)有

$$
E_\tau^{n-j+1} \left(I - \frac{\tau}{2} A \right)^{-1} - E(t_n - t_{j-1}) \leqslant C(T) \tau.
$$

那么对$I_{3,1,3}$有

$$
\|I_{3,1,3}\|_{L_2(\mathcal{D};H)}^2 = E \left\| \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left(E_\tau^{n-j+1} \left(I - \frac{\tau}{2} A \right)^{-1} - E(t_n - t_{j-1}) \right) G(u(s)) \mathrm{d}W \right\|^2
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j} E\left\|\left(E_\tau^{n-j+1}\left(I-\frac{\tau}{2}A\right)^{-1}-E(t_n-t_{j-1})\right)G(u(s))\right\|^2 \mathrm{d}s\\
&\leqslant C(T)\tau^2\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j} E\|G(u(s))\|^2\ \mathrm{d}s\\
&\leqslant C\left(T,G,\sup_{s\in[0,T]}E\|u(s)\|\right)\tau^2. \qquad (3.2.31)
\end{aligned}
$$

根据估计式(3.2.16)和式(3.2.17)可以类似地得到

$$
\begin{aligned}
&\|I_{3,1,4}\|^2_{L_2(\mathcal{D};H)}\\
&= E\left\|\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left(E(t_n-t_{j-1})-E(t_n-s)\right)G(u(s))\mathrm{d}W\right\|^2\\
&= \sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j} E\left\|E(t_n-s)(I-E(s-t_{j-1}))G(u(s))\right\|^2\mathrm{d}s\\
&\leqslant C(T)\tau^2\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j} E\|G(u(s))\|^2\mathrm{d}s\\
&\leqslant C\left(T,G,\sup_{s\in[0,T]}E\|u(s)\|\right)\tau^2. \qquad (3.2.32)
\end{aligned}
$$

根据估计式(3.2.29), 式(3.2.30), 式(3.2.31)和式(3.2.32), 考虑到$0\leqslant\gamma<1$, 则对$I_{3,1}$的估计如下

$$
\|I_{3,1}\|^2_{L_2(\mathcal{D};H)}\leqslant C(G)\left(\tau^{2\gamma}+\tau\sum_{j=1}^{n}E\|e^j\|^2\right).
$$

类似地可得$I_{3,2}$的估计式, 根据式(3.2.28)可以进一步推导出I_3的估计式(3.2.26). 证毕. ¶

下面我们给出主要定理3.2.1的证明.

证明 (定理3.2.1) 根据引理3.2.3~引理3.2.5有

$$
\begin{aligned}
&\|e^n\|^2_{L_2(\mathcal{D};H)}\leqslant\|I_1\|^2_{L_2(\mathcal{D};H)}+\|I_2\|^2_{L_2(\mathcal{D};H)}+\|I_3\|^2_{L_2(\mathcal{D};H)}\\
&\leqslant C\left(T,\|u_0\|_{L_2(\mathcal{D};H)}\right)\tau^2+C\left(T,\sup_{s\in[0,T]}E\|\nabla u(s)\|\right)\left(\tau^{2\gamma}+\tau^2\sum_{j=1}^{n}E\|e^j\|^2\right)+\\
&\quad C(G)\left(\tau^{2\gamma}+\tau\sum_{j=1}^{n}E\|e^j\|^2\right).
\end{aligned}
$$

那么由离散Gronwall引理1.2.3可以得到

$$
\|e^n\|^2_{L_2(\mathcal{D};H)}\leqslant C\left(T,G,\sup_{s\in[0,T]}E\|\nabla u(s)\|\right)\tau^{\min\{2\gamma,1\}},
$$

即有

$$\|e^n\|_{L_2(\mathcal{D};H)} \leqslant C\left(T, G, \sup_{s\in[0,T]} E\|\nabla u(s)\|\right)\tau^{\min\{\gamma,1/2\}}.$$

证毕. ¶

3.2.2　全离散格式的有限元误差估计

在区域$\overline{\mathcal{D}}$上建立一族有限的三角剖分$\mathcal{T}^h=\{K\}$, 满足$\overline{\mathcal{D}}=\bigcup\limits_{K\in\mathcal{T}^h} K$. 若$\mathcal{T}^h$中的任意单元$K$内部非空, 且至多有一个边属于$\partial\mathcal{D}$, 任意两个单元$K$之间没有公共内点,则称$K$为$\mathcal{T}^h$的单元. 设$n_K$是单元$K$的向外单位法向量, h_K是单元K的最大直径, $h=\max\limits_{K\in\mathcal{T}^h} h_K$.

以下总设三角剖分$\mathcal{T}^h$是正则的, 即存在独立于$\mathcal{T}^h$的常数$R>0$, 满足$1\leqslant \max\limits_{K\in\mathcal{T}^h}\frac{h_K}{\rho_K}\leqslant R$, 其中$\rho_K$表示单元$K$内切球的直径. 设$P_k$表示所有次数不超过$k$的多项式集合, $\lambda_i=\lambda_i(x,y)$表示点(x,y)的面积坐标, 其中$i=1,2,3$. 令$\mathcal{P}_1(K)=[P_1\oplus \mathrm{span}\{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\}]^2$. 考虑如下有限元空间:

$$V_0^h=\left\{v\in C^0(\bar{\mathcal{D}})^2 : v|_K\in\mathcal{P}_1(K), \forall K\in\mathcal{T}^h, v|_{\partial\mathcal{D}}=0\right\},$$
$$Q_h=\left\{q\in C^0(\bar{\mathcal{D}}) : q|_K\in P_1, \forall K\in\mathcal{T}^h\right\}.$$

令

$$S_h=\left\{v_h\in V_0^h : (q_h\cdot\nabla v_h)=0, \forall q_h\in Q_h\right\}.$$

设

$$S_h\subset H_0^1(\mathcal{D})=\left\{v\in L^2(\mathcal{D}) : \nabla v\in L^2(\mathcal{D}), v|_{\partial\mathcal{D}}=0\right\}.$$

广义L_2投影算子$P_h:\dot{H}^{-1}\to S_h$定义为[40]:

$$(P_h v,\chi)=(v,\chi),\quad \forall\chi\in S_h\subset\dot{H}^1,\ \forall v\in\dot{H}^{-1}. \tag{3.2.33}$$

显然当$v\in L^2(\mathcal{D})$时, $P_h v$是标准L_2投影算子. 当$0\leqslant\kappa\leqslant 1$时有如下的估计

$$\|v-P_h v\|=\|(I-P_h)v\|\leqslant Ch^\kappa\|v\|_\kappa,\ \forall v\in H^\kappa(\mathcal{D}). \tag{3.2.34}$$

将广义L_2投影算子作用到随机发展方程(3.1.3)的两边, 可以得到有限元半离散问题: 求$u_h(\cdot,t)\in S_h$, 对$\forall t\in[0,T]$都有

$$\frac{\partial u_h}{\partial t}+A_h u_h+B_h(u_h,u_h)=P_h G(u_h)\frac{\partial W}{\partial t},\quad u_h(0)=P_h u_0, \tag{3.2.35}$$

其中$A_h:S_h\to S_h$是算子A对应的的离散算子, 满足

$$(A_h\psi,\chi)=(A\psi,\chi),\quad \forall\psi,\chi\in S_h.$$

同理可以定义算子B对应的离散算子B_h.

定义$E_h(t)=\mathrm{e}^{-tA_h}(t\geqslant 0)$, 则温和解式(3.1.4)对应的有限元半离散格式为

$$u_h(t)\quad=\quad E_h(t)P_h u_0-\int_0^t E_h(t-s)B_h(u_h(s),u_h(s))\mathrm{d}s+$$

$$\int_0^t E_h(t-s)P_hG(u_h(s))\mathrm{d}W. \tag{3.2.36}$$

对于时间区间$[0,T]$, 设$0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{N-1}<t_N=T$, τ为时间步长, $t_n=n\tau$, $I_n=[t_{n-1},t_n]$, $n=1,2,\cdots,N$. 利用向后Euler格式可得方程(3.1.3)的全离散问题: 求$u_h^n\in S_h$ $(n=1,2,\cdots,N)$, 满足

$$\begin{aligned}&\frac{u_h^n-u_h^{n-1}}{\tau}+A_hu_h^n+B_h(u_h^{n-1},u_h^n)\\=&\ \frac{1}{\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}P_hG(u_h^{n-1})\mathrm{d}W,\quad u_h^0=P_hu_0.\end{aligned} \tag{3.2.37}$$

定义算子$E_{\tau h}=\frac{1}{I+\tau A_h}$, 其中$I$表示单位算子, $E_{\tau h}^n$表示$E_{\tau h}$的n阶幂. 全离散格式(3.2.37)整理可得

$$\begin{aligned}u_h^n\ =&\ E_{\tau h}^nP_hu_0-\sum_{j=1}^nE_{\tau h}^{n-j+1}\tau B_h(u_h^{j-1},u_h^j)+\\&\sum_{j=1}^n\int_{t_{j-1}}^{t_j}E_{\tau h}^{n-j+1}P_hG(u_h^{j-1})\mathrm{d}W.\end{aligned} \tag{3.2.38}$$

由温和解式(3.1.4)的表达式有

$$\begin{aligned}u(t_n)\ =&\ E(t_n)u_0-\int_0^{t_n}E(t_n-s)B(u(s),u(s))\mathrm{d}s+\\&\int_0^{t_n}E(t_n-s)G(u(s))\mathrm{d}W.\end{aligned} \tag{3.2.39}$$

根据式(3.2.38)和式(3.2.39)定义误差$e^n=u_h^n-u(t_n)$, 将误差e^n分为三部分分别进行处理.

$$\begin{aligned}e^n\ =&\ [E_{\tau h}^nP_h-E(t_n)]u_0+\\&\left[\int_0^{t_n}E(t_n-s)B(u(s),u(s))\ \mathrm{d}s-\sum_{j=1}^nE_{\tau h}^{n-j+1}\tau B_h(u_h^{j-1},u_h^j)\right]+\\&\left[\sum_{j=1}^n\int_{t_{j-1}}^{t_j}E_{\tau h}^{n-j+1}P_hG(u_h^{j-1})\mathrm{d}W-\int_0^{t_n}E(t_n-s)G(u(s))\mathrm{d}W\right]\\=&\ I_1+I_2+I_3.\end{aligned} \tag{3.2.40}$$

下面首先对I_2进行估计.

引理 3.2.6 I_2和e^{j-1}的定义如式(3.2.40)所示, $\sup\limits_{s\in[0,T]}E\|\nabla u(s)\|<+\infty$, τ为时间步长, h为空间步长, 则存在常数$C\left(\sup\limits_{s\in[0,T]}E\|\nabla u(s)\|\right)>0$满足

$$\|I_2\|^2_{L_2(\mathcal{D};H)}\leqslant C\left(\sup_{s\in[0,T]}E\|\nabla u(s)\|\right)\left(h^{2\kappa}+\sum_{j=1}^n\tau E\|e^{j-1}\|_1^2+\tau^{2\gamma}\right), \tag{3.2.41}$$

其中$0\leqslant\gamma<1$, $0\leqslant\kappa\leqslant1$.

证明 对I_2有

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^{t_n} E(t_n-s)B(u(s),u(s))\ \mathrm{d}s - \sum_{j=1}^{n} E_{\tau h}^{n-j+1}\tau B_h(u_h^{j-1},u_h^j) \\
&= \left[\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j} E(t_n-s)[B(u(s),u(s))-B(u(t_j),u(t_j))]\ \mathrm{d}s\right] + \\
&\quad \sum_{j=1}^{n}\left[\int_{t_{j-1}}^{t_j} E(t_j-s)\ \mathrm{d}s - E_{\tau h}^{n-j+1}\tau\right] B(u(t_j),u(t_j)) + \\
&\quad \sum_{j=1}^{n} E_{\tau h}^{n-j+1}\tau[B(u(t_j),u(t_j))-B(u(t_{j-1}),u(t_j))] + \\
&\quad \left[\sum_{j=1}^{n} E_{\tau h}^{n-j+1}\tau B(u(t_{j-1}),u(t_j)) - \sum_{j=1}^{n} E_{\tau h}^{n-j+1}\tau B_h(u_h^{j-1},u_h^j)\right] \\
&= I_{2,1}+I_{2,2}+I_{2,3}+I_{2,4}.
\end{aligned}$$

对于$I_{2,1}$, 根据引理3.2.2和估计式(3.2.18)可得

$$\begin{aligned}
\|I_{2,1}\|_{L_2(\mathcal{D};H)}^2 &= \left\|\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j} E(t_n-s)[B(u(s),u(s))-B(u(t_j),u(t_j))]\ \mathrm{d}s\right\|_{L_2(\mathcal{D};H)}^2 \\
&= E\left\|\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j} E(t_n-s)[B(u(s),u(s))-B(u(t_j),u(t_j))]\ \mathrm{d}s\right\|^2 \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j} E\left\|B(u(s),u(s))-B(u(t_j),u(t_j))\right\|^2 \mathrm{d}s \\
&\leqslant C\left(\sup_{s\in[0,T]} E\|\nabla u(s)\|\right)\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(s-t_j)^{2\gamma}\mathrm{d}s \\
&\leqslant C\left(\sup_{s\in[0,T]} E\|\nabla u(s)\|\right)\tau^{2\gamma}.
\end{aligned}$$

对$I_{2,2}$, 根据估计式(3.2.16)和式(3.2.17)有

$$\begin{aligned}
\|I_{2,2}\|_{L_2(\mathcal{D};H)}^2 &= \left\|\left[\int_{t_{j-1}}^{t_j} E(t_j-s)\ \mathrm{d}s - \sum_{j=1}^{n} E_{\tau h}^{n-j+1}\tau\right] B(u(t_j),u(t_j))\right\|_{L_2(\mathcal{D};H)}^2 \\
&\leqslant E\Big\|\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\big[E(t_j-s)-E(t_j-t_{j-1}) + \\
&\qquad E(t_j-t_{j-1})-E_{\tau h}^{n-j+1}\big]\mathrm{d}s\cdot B(u(t_j),u(t_j))\Big\|^2 \\
&\leqslant E\left\|\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}[E(t_j-s)-E(t_j-t_{j-1})]\mathrm{d}s\cdot B(u(t_j),u(t_j))\right\|^2 +
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& E\left\|\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}[E(t_j-t_{j-1})-E_{\tau h}^{n-j+1}]\mathrm{d}s\cdot B(u(t_j),u(t_j))\right\|^2 \\
\leqslant\ & C\left(\sup_{s\in[0,T]}E\|\nabla u(s)\|\right)\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\|E(t_j-s)-E(t_j-t_{j-1})\|^2\mathrm{d}s+ \\
& C\left(\sup_{s\in[0,T]}E\|\nabla u(s)\|\right)\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left\|E(t_j-t_{j-1})-E_{\tau h}^{n-j+1}\right\|^2\mathrm{d}s \\
\leqslant\ & C\left(\sup_{s\in[0,T]}E\|\nabla u(s)\|\right)\tau^2.
\end{aligned}
$$

对于$I_{2,3}$, 考虑到$\|E_{\tau h}\|\leqslant 1$, 有

$$
\begin{aligned}
\|I_{2,3}\|_{L_2(\mathcal{D};H)}^2 &= \left\|\sum_{j=1}^{n}E_{\tau h}^{n-j+1}\tau[B(u(t_j)-u(t_{j-1}),u(t_j))]\right\|_{L_2(\mathcal{D};H)}^2 \\
&\leqslant E\left\|\sum_{j=1}^{n}E_{\tau h}^{n-j+1}\tau\left[B(u(t_j)-u(t_{j-1}),u(t_j))\right]\right\|^2 \\
&\leqslant C\left(\sup_{s\in[0,T]}E\|\nabla u(s)\|\right)\tau^2.
\end{aligned}
$$

由于$u^0=u(t_0)=u_0$, 那么

$$
\begin{aligned}
& \|I_{2,4}\|_{L_2(\mathcal{D};H)}^2 \\
=\ & \left\|\sum_{j=1}^{n}E_{\tau h}^{n-j+1}\tau B(u(t_{j-1}),u(t_j))-\sum_{j=1}^{n}E_{\tau h}^{n-j+1}\tau B_h(u_h^{j-1},u_h^j)\right\|_{L_2(\mathcal{D};H)}^2 \\
=\ & \Bigg\|\sum_{j=1}^{n}E_{\tau h}^{n-j+1}\tau\big[B(u(t_{j-1}),u(t_j))-B_h(u_{j-1},u_j)+ \\
& B_h(u_{j-1},u_j)-B_h(u_h^{j-1},u_j)+B_h(u_h^{j-1},u_j)-B_h(u_h^{j-1},u_h^j)\big]\Bigg\|_{L_2(\mathcal{D};H)}^2 \\
\leqslant\ & \left\|\sum_{j=1}^{n}\tau(I-P_h)B(u_{j-1},u_j)\right\|_{L_2(\mathcal{D};H)}^2+\left\|\sum_{j=1}^{n}\tau B_h(e_{j-1},u_j)\right\|_{L_2(\mathcal{D};H)}^2+ \\
& \left\|\sum_{j=1}^{n-1}\tau B_h(u_h^{j-1},e_j)\right\|_{L_2(\mathcal{D};H)}^2+C\tau^2 \\
\leqslant\ & C\left(\sup_{s\in[0,T]}E\|\nabla u(s)\|\right)\left(h^{2\kappa}+\sum_{j=1}^{n}\tau E||e^{j-1}||_1^2+\tau^2\right).
\end{aligned}
$$

综上所述可以得到式(3.2.41). 证毕. ¶

下面对带有随机项的部分I_3进行估计.

引理 3.2.7 I_3和e^{j-1}的定义如式(3.2.40)所示, τ为时间步长, 则存在常数$C(G)>0$, 使得

$$\|I_3\|^2_{L_2(\mathcal{D};H)} \leqslant C(G)\left(\sum_{j=1}^{n}\tau E\|e^{j-1}\|^2+\tau^{2\gamma}\right), \tag{3.2.42}$$

其中$0\leqslant\gamma<1$.

证明 对于I_3有

$$\begin{aligned}
I_3 &= \sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j} E_{\tau h}^{n-j+1}P_h G(u_h^{j-1})\mathrm{d}W-\int_0^{t_n}E(t_n-s)G(u(s))\mathrm{d}W\\
&= \sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j} E_{\tau h}^{n-j+1}P_h\left(G(u_h^{j-1})-G(u(t_{j-1}))\right)\mathrm{d}W+\\
&\quad \sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j} E_{\tau h}^{n-j+1}P_h\left(G(u(t_{j-1}))-G(u(s))\right)\mathrm{d}W+\\
&\quad \sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j} \left(E_{\tau h}^{n-j+1}P_h-E(t_n-t_{j-1})\right)G(u(s))\mathrm{d}W+\\
&\quad \sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j} \left(E(t_n-t_{j-1})-E(t_n-s)\right)G(u(s))\mathrm{d}W\\
&= I_{3,1}+I_{3,2}+I_{3,3}+I_{3,4}.
\end{aligned}$$

对于$I_{3,1}$, 根据Itô等距式(1.5.40)和$\|E_{\tau h}^{n-j+1}\|\leqslant 1$有

$$\begin{aligned}
\|I_{3,1}\|^2_{L_2(\mathcal{D};H)} &= E\left\|\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j} E_{\tau h}^{n-j+1}P_h\left(G(u_h^{j-1})-G(u(t_{j-1}))\right)\mathrm{d}W\right\|^2\\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n}\tau\ \left\|E\left[E_{\tau h}^{n-j+1}P_h\left(G(u_h^{j-1})-G(u(t_{j-1}))\right)\right]\right\|^2\\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n}\tau\ E\left\|G(u_h^{j-1})-G(u(t_{j-1}))\right\|^2\\
&\leqslant C(G)\sum_{j=1}^{n}\tau E\left\|u_h^{j-1}-u(t_{j-1})\right\|^2=C(G)\sum_{j=1}^{n}\tau E\|e^{j-1}\|^2.
\end{aligned}$$

对于$I_{3,2}$, 其处理方法与$I_{3,1}$类似.

$$\begin{aligned}
\|I_{3,2}\|^2_{L_2(\mathcal{D};H)} &= E\left\|\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j} E_{\tau h}^{n-j+1}\left(G(u(t_{j-1}))-G(u(s))\right)\mathrm{d}W\right\|^2\\
&= \sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j} E\left\|E_{\tau h}^{n-j+1}\left(G(u(t_{j-1}))-G(u(s))\right)\right\|\mathrm{d}s\\
&\leqslant C(G)\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(s-t_{j-1})^{2\gamma}\mathrm{d}s\leqslant C(G)\tau^{2\gamma}.
\end{aligned}$$

对于$j=1,2,\cdots,n$, 有

$$\begin{aligned}E_{\tau h}^{n-j+1}-E(t_n-t_{j-1}) &= (\frac{1}{I+\tau A_h})^{n-j+1}-\mathrm{e}^{t_n-t_{j-1}}\\ &= (I+\tau A_h)^{-(n-j+1)}-\mathrm{e}^{-\tau A(n-j+1)}\leqslant C(T)\tau.\end{aligned}$$

那么对$I_{3,3}$有

$$\begin{aligned}\|I_{3,3}\|^2_{L_2(\mathcal{D};H)} &= E\left\|\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left(E_{\tau h}^{n-j+1}-E(t_n-t_{j-1})\right)G(u(s))\mathrm{d}W\right\|^2\\ &= \sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}E\|\left(E_{\tau h}^{n-j+1}-E(t_n-t_{j-1})\right)G(u(s))\|^2\mathrm{d}s\\ &\leqslant C(T)\tau^2\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}E\|G(u(s))\|^2\mathrm{d}s\\ &\leqslant C\left(T,G,\sup_{s\in[0,T]}E\|u(s)\|\right)\tau^2.\end{aligned}$$

类似地可以得到

$$\begin{aligned}\|I_{3,4}\|^2_{L_2(\mathcal{D};H)} &= E\left\|\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left(E(t_n-t_{j-1})-E(t_n-s)\right)G(u(s))\mathrm{d}W\right\|^2\\ &= \sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}E\left\|E(t_n-s)(I-E(s-t_{j-1}))G(u(s))\right\|^2\ \mathrm{d}s\\ &\leqslant C(T)\tau^2\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}E\|G(u(s))\|^2\mathrm{d}s\\ &\leqslant C\left(T,G,\sup_{s\in[0,T]}E\|u(s)\|\right)\tau^2.\end{aligned}$$

综上所述可以得到不等式(3.2.42). 证毕. ¶

下面对式(3.2.40)定义的误差e^n进行估计.

定理 3.2.2 $u(t_n)$和u_h^n分别是式(3.1.3)和式(3.2.37)的解, 初值u_0满足假设3.1.1中的条件, τ为时间步长, h为空间步长. 若$\sup\limits_{s\in[0,T]}E\|\nabla u(s)\|<+\infty$, 则存在常数

$$C=C\left(G,\sup_{s\in[0,T]}E\|\nabla u(s)\|\right)>0,$$

满足

$$\|u_h^n-u(t_n)\|_{L_2(\mathcal{D};H)}\leqslant C\left(G,\sup_{s\in[0,T]}E\|\nabla u(s)\|\right)\left(\tau^{\min\{\gamma,1/2\}}+h^{\kappa}\right), \tag{3.2.43}$$

其中$0\leqslant\gamma<1$, $0\leqslant\kappa\leqslant1$.

证明 首先对误差e^n的第一部分I_1进行估计.

$$\begin{aligned}\|I_1\|^2_{L_2(\mathcal{D};H)} &= \|[E^n_{\tau h}P_h - E(t_n)]u_0\|^2_{L_2(\mathcal{D};H)} = E\left\|[E^n_{\tau h}P_h - E(t_n)]u_0\right\|^2 \\ &= E\left\|[(I+\tau A_h)^{-n} - \mathrm{e}^{-n\tau A}]u_0\right\|^2 \leqslant C\left(\|u_0\|_{L_2(\mathcal{D};H)}\right)\tau^2.\end{aligned}$$

根据引理3.2.6和引理3.2.7可以得到

$$\begin{aligned}&\|e^n\|^2_{L_2(\mathcal{D};H)} \leqslant \|I_1\|^2_{L_2(\mathcal{D};H)} + \|I_2\|^2_{L_2(\mathcal{D};H)} + \|I_3\|^2_{L_2(\mathcal{D};H)} \\ \leqslant\ & C\left(\|u_0\|_{L_2(\mathcal{D};H)}\right)\tau^2 + C\left(\sup_{s\in[0,T]} E\|\nabla u(s)\|\right)\left(h^{2\kappa} + \sum_{j=1}^n \tau E\|e^{j-1}\|_1^2 + \tau^{2\gamma}\right) + \\ & C(G)\left(\sum_{j=1}^n \tau E\|e^{j-1}\|^2 + \tau^{2\gamma}\right).\end{aligned}$$

根据离散Gronwall引理1.2.3, 考虑$0 \leqslant \gamma < 1$, $0 \leqslant \kappa \leqslant 1$, 则有

$$\|e^n\|^2_{L_2(\mathcal{D};H)} \leqslant C\left(G, \sup_{s\in[0,T]} E\|\nabla u(s)\|\right)\left(\tau^{\min\{2\gamma,1\}} + h^{2\kappa}\right),$$

即有

$$\|e^n\|_{L_2(\mathcal{D};H)} \leqslant C\left(G, \sup_{s\in[0,T]} E\|\nabla u(s)\|\right)\left(\tau^{\min\{\gamma,1/2\}} + h^{\kappa}\right).$$

证毕. ¶

3.3 后验误差估计

本节介绍加权Clement-type插值算子, 在有限元误差估计的基础上, 对基于有限元方法的半离散格式和全离散格式进行完整的后验误差估计, 构造适当的后验误差估计因子, 给出其中一个后验误差估计因子的上下界.

3.3.1 加权Clement-type插值算子

本节主要介绍有限元空间中的加权Clement-type插值算子, 并对插值算子的一些性质进行证明, 更多插值算子的结论读者可参考文献[41].

定义 3.3.1 令D为点的集合, 定义$\Lambda = \{z \in D : z \notin \partial\mathcal{D}\}$. 对于三角剖分$\mathcal{T}^h$下的有限元空间中点$z$的基函数$\phi_z$, 令

$$\psi_z = \phi_z/\psi, \quad \psi = \sum_{z\in\Lambda}\phi_z.$$

则对$\forall v \in H_0^1(\mathcal{D})$, 定义$v$的加权Clement-type插值算子$\pi$满足

$$\pi v = \sum_{z\in\Lambda} v_z\phi_z \in S_h, \quad v_z = \left(\int_{\mathcal{D}}\psi_z v\right)\Big/\left(\int_{\mathcal{D}}\phi_z\right).$$

容易证明, 对$\forall v\in W_0^{1,2}(\mathcal{D})$和$k=\mathrm{diam}(\mathcal{D})$, 有

$$\int_{\mathcal{D}}|v|^2\mathrm{d}x\lesssim\int_{\mathcal{D}}k^2|\nabla v|^2\mathrm{d}x. \tag{3.3.1}$$

下面建立加权Clement-type插值算子π的两个误差估计性质, 并给出相关结论和证明, 其中的证明选自文献[42, 43]. 令符号$⨍_{\mathcal{D}_z}$表示在区域$\mathcal{D}_z$上的积分平均. 首先给出如下两个引理.

引理 3.3.1 对于正整数d和n, 存在常数$c>0$使得对$\forall a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbb{R}^2$, 都有

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j-1}|a_j-a_k|^2\leqslant c\sum_{l=1}^{n-1}|a_{l+1}-a_l|^2.$$

引理 3.3.2 对所有的$a,\ g_1,g_2\geqslant 0,\ p>1,\ \theta>0$, 有

$$(a+g_1)^{p-2}g_1g_2\leqslant\theta^{-\alpha}(a+g_1)^{p-2}g_1^2+\theta(a+g_2)^{p-2}g_2^2,$$

其中

$$\alpha=\begin{cases}1, & 1<p\leqslant 2,\ \theta\in[1,\infty),\quad \text{或}\quad 2<p<\infty,\ \theta\in(0,1),\\ \frac{1}{p-1}, & 1<p\leqslant 2,\ \theta\in(0,1),\quad \text{或}\quad 2<p<\infty,\ \theta\in[1,\infty).\end{cases}$$

由引理3.3.1和引理3.3.2, 我们又可得到如下两个引理.

引理 3.3.3 令π表示定义3.3.1中的加权Clement-type插值算子, K是三角剖分$\mathcal{T}^h$中的单元. 对于任意的$v\in H_0^1(\mathcal{D})$和$K\in\mathcal{T}^h$, 有

$$\int_K|v-\pi v|^2/h_k^2\mathrm{d}x+\int_K|\nabla(v-\pi v)|^2\mathrm{d}x\lesssim\sum_{z\in\Lambda\cap K}\int_{\mathcal{D}_z}|\nabla v|^2\mathrm{d}x, \tag{3.3.2}$$

同时,

$$\sum_k\left(\int_K|v-\pi v|^2/h_K^2\mathrm{d}x+\int_K|\nabla(v-\pi v)|^2\mathrm{d}x\right)\lesssim\sum_K\int_K|\nabla v|^2\mathrm{d}x. \tag{3.3.3}$$

证明 对$\forall z\in D$, 令$v_z=(\pi v)(z)$. 设$(\psi_z)_{z\in\Lambda\cap K}$是单元$K$上的一个逼近函数, 则有

$$\begin{aligned}\int_K|v-\pi v|^2/h_K^2\mathrm{d}x &= \int_K\left|\sum_{z\in\Lambda\cap K}(v\psi_z-v_z\phi_z)\right|^2\Big/h_K^2\mathrm{d}x\\ &\lesssim \sum_{z\in\Lambda\cap K}\int_K|v\psi_z-v_z\phi_z|^2/h_K^2\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

令$\mathcal{D}_z$是ϕ_z的支撑集. 由$K\subseteq\bar{\mathcal{D}}_z$, 对任意固定的$z\in\Lambda\cap\bar{K}$有,

$$\int_K|v\psi_z-v_z\phi_z|^2/h_K^2\mathrm{d}x\leqslant\int_{\mathcal{D}_z}|v\psi_z-v_z\phi_z|^2/h_K^2\mathrm{d}x.$$

首先假设$\psi_z=\phi_z$, 即$\mathcal{D}_z$中所有的点都是自由的. 根据式(3.3.1) 和$|\phi_z|\leqslant 1$有

$$\int_{\mathcal{D}_z}|v\psi_z-v_z\phi_z|^2/h_K^2\mathrm{d}x\leqslant\int_{\mathcal{D}_z}|v-v_z|^2/h_K^2\mathrm{d}x\lesssim\int_{\mathcal{D}_z}|\nabla v|^2\mathrm{d}x.$$

假设在$\mathcal{D}_z$上$\psi\neq 1$, 且$\partial\mathcal{D}_z\cap\partial\mathcal{D}_h$至少包含一个边, 则有

$$\int_{\mathcal{D}_z}|v\psi_z|^2/h_K^2\mathrm{d}x\leqslant\int_{\mathcal{D}_z}|v|^2/h_K^2\mathrm{d}x\lesssim\int_{\mathcal{D}_z}|\nabla v|^2\mathrm{d}x.$$

由于$|v_z|\lesssim\left|⨍_{\mathcal{D}_z}\psi_z v\mathrm{d}x\right|$是凸的, 那么根据Jensen不等式有

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{D}_z}|v_z|^2/h_K^2\mathrm{d}x&\lesssim\int_{\mathcal{D}_z}\left|⨍_{\mathcal{D}_z}\psi_z v\mathrm{d}x\right|^2\Big/h_K^2\,\mathrm{d}y\\ \leqslant\quad&\int_{\mathcal{D}_z}⨍_{\mathcal{D}_z}|\psi_z v|^2/h_K^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{\mathcal{D}_z}|\psi_z v|^2/h_K^2\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

对$0\leqslant\phi_z\leqslant 1$和$0\leqslant\psi\leqslant 1$有

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{D}_z}|v\psi_z-v_z\phi_z|^2/h_K^2\mathrm{d}x\\ \lesssim\quad&\int_{\mathcal{D}_z}|v\psi_z|^2/h_K^2\mathrm{d}x+\int_{\mathcal{D}_z}|v_z\psi_z|^2/h_K^2\mathrm{d}x\lesssim\int_{\mathcal{D}_z}|\nabla v|^2\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

根据引理3.3.1的结论, 令$a_j=\nabla v_h|_{K_j}$, 其中$K_j\in\mathcal{T}^h$, $\bigcup_{i=1}^n K_i=\bar{\mathcal{D}}_z$, $\{\bigcap_{i=1}^n K_i\}\subset\mathcal{D}_z$. 令$c$表示$K$上$v$的积分平均值, 则有

$$\int_K|\nabla(v-\pi v)|^2\mathrm{d}x\lesssim\int_K|\nabla v|^2\mathrm{d}x+\int_K|\nabla(\pi v-c)|^2\mathrm{d}x.\tag{3.3.4}$$

不等式(3.3.4)右端的第一项有界. 注意$\pi v-c$是K上的仿射函数, 则有

$$|\nabla(\pi v-c)|\lesssim⨍_K|\pi v-c|/h_K\mathrm{d}x.$$

由Jensen不等式可以推导出

$$\int_K|\nabla(\pi v-c)|^2\mathrm{d}x\lesssim\int_K⨍_K|\pi v-c|^2/h_K^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_K|\pi v-c|^2/h_K^2\mathrm{d}x.$$

则有

$$\int_K|\pi v-c|^2/h_K^2\mathrm{d}x\lesssim\int_K|v-\pi v|^2/h_K^2\mathrm{d}x+\int_K|v-c|^2/h_K^2\mathrm{d}x.\tag{3.3.5}$$

由式(3.3.1)的右端可知, 不等式(3.3.5)右端的第一项有界.

$$\int_K|v-c|^2/h_K^2\mathrm{d}x\lesssim\int_K|\nabla v|^2\mathrm{d}x.$$

那么

$$\int_K|\nabla(v-\pi v)|^2/h_K^2\mathrm{d}x\lesssim\int_K|\nabla v|^2\mathrm{d}x+\int_K|v-\pi v|^2/h_K^2\mathrm{d}x.$$

证毕. ¶

引理 3.3.4 对$\forall\alpha,\delta>0$, $v\in W_0^{1,2}(\mathcal{D})$, $f\in W^{1,2}(\mathcal{D})$, 有

$$\int_{\mathcal{D}}f(v-\pi v)\mathrm{d}x\lesssim\delta^{-\alpha}\int_{\mathcal{D}}h_z^4|\nabla f|^2\mathrm{d}x+\delta\int_{\mathcal{D}}|\nabla v|^2\mathrm{d}x,$$

并且

$$\int_{\mathcal{D}}f(v-\pi v)\mathrm{d}x\lesssim\delta^{-\alpha}\sum_K\int_K h_z^4|\nabla f|^2\mathrm{d}x+\delta\sum_K\int_K|\nabla v|^2\mathrm{d}x.$$

证明 由$f_z = ⨍_{\mathcal{D}_z} f(x)\mathrm{d}x$, 注意到$\int_{\mathcal{D}}(v\psi_z - v_z\phi_z)\mathrm{d}x = 0$, 有

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{D}} f(v-\pi v)\mathrm{d}x &= \sum_{z\in\Lambda}\int_{\mathcal{D}} f(v\psi_z - v_z\phi_z)\mathrm{d}x \\ &= \sum_{z\in\Lambda}\int_{\mathcal{D}_z}(f-f_z)h_z(v\psi_z - v_z\phi_z)/h_z\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

根据引理3.3.2有

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{D}_z}(f-f_z)h_z(v\psi_z - v_z\phi_z)/h_z\mathrm{d}x, \\ \leqslant\ & \delta^{-\alpha}\int_{\mathcal{D}_z} h_z^2|f-f_z|^2\mathrm{d}x + \delta\int_{\mathcal{D}_z}|(v\psi_z - v_z\phi_z)/h_z|^2\mathrm{d}x \\ \leqslant\ & \delta^{-\alpha}\int_{\mathcal{D}_z} h_z^4|(f-f_z)/h_z|^2\mathrm{d}x + \delta\int_{\mathcal{D}_z}|(v\psi_z - v_z\phi_z)/h_z|^2\mathrm{d}x \\ \lesssim\ & \delta^{-\alpha}\int_{\mathcal{D}_z} h_z^4|\nabla f|^2\mathrm{d}x + \delta\int_{\mathcal{D}_z}|\nabla v|^2\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

那么根据上述不等式和引理3.3.3可以得到结论. 证毕. ¶

3.3.2 空间半离散格式的后验误差估计

定义算子

$$\begin{aligned}a(u,v) &= \int_{\mathcal{D}} \nu\nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x, \\ b(u,v,w) &= \int_{\mathcal{D}}(u\cdot\nabla)v\cdot w\mathrm{d}x, \\ (w,v) &= \int_{\mathcal{D}} w\cdot v\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

令标准空间

$$V = \{v\in H_0^1(\mathcal{D}) : \nabla\cdot v = 0\}.$$

则随机Navier-Stokes方程(3.1.1)对应的变分问题为: 求$u\in V$满足

$$(u_t, v) + a(u,v) + b(u,u,v) = (G(u)\dot{W}_t, v),\ \forall v\in V. \tag{3.3.6}$$

同样地, 在区域$\overline{\mathcal{D}}$上建立一族有限的正则的三角剖分$\mathcal{T}^h = \{K\}$, K为$\mathcal{T}^h$的单元, 满足$\overline{\mathcal{D}} = \bigcup_{K\in\mathcal{T}^h} K$. 考虑有限元空间:

$$\begin{aligned}V_0^h &= \left\{v\in C^0(\bar{\mathcal{D}})^2 : v|_K\in\mathcal{P}_1(K), \forall K\in\mathcal{T}^h, v|_{\partial\mathcal{D}} = 0\right\}, \\ Q_h &= \left\{q\in C^0(\bar{\mathcal{D}}) : q|_K\in P_1, \forall K\in\mathcal{T}^h\right\}.\end{aligned}$$

令

$$S_h = \left\{v_h\in V_0^h : (q_h\cdot\nabla v_h) = 0, \forall q_h\in Q_h\right\}.$$

那么对应于变分问题(3.3.6)的有限元半离散问题为: 求$u_h \in S_h$, 满足

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial u_h}{\partial t}, v_h\right)+a(u_h, v_h)+b(u_h, u_h, v_h)\\=\ &(G(u_h)\dot{W}, v_h),\ \forall v_h \in V_0^h,\end{aligned}\tag{3.3.7}$$

其中$u_h(x,0)=u_0^h(x)$.

考虑利用向后Euler格式对半离散格式(3.3.7)中的时间变量进行离散. 令$0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{N-1}<t_N=T$, $t_n=n\tau$, $I_n=[t_{n-1},t_n]$, $n=1,2,\cdots,N$, 那么对于$n=1,2,\cdots,N$, 变分问题(3.3.6)对应的全离散问题为: 求$U^h \in S_h$, 满足

$$\begin{aligned}&\left(\frac{U^n-U^{n-1}}{\tau}, v_h\right)+a(U^n, v_h)+b(U^{n-1}, U^n, v_h)\\=\ &\left(G(U^{n-1})\frac{W(t_n)-W(t_{n-1})}{\tau}, v_h\right),\ \forall v_h \in V_0^h,\end{aligned}\tag{3.3.8}$$

其中$U^0(x)=u_0^h(x)$. 对于$t\in[t_{n-1},t_n]$ $(n=1,2,\cdots,N)$, 定义

$$U(x,t)=\frac{t-t_{n-1}}{\tau}U^n(x)+\frac{t_n-t}{\tau}U^{n-1}(x),\tag{3.3.9}$$

$$\tilde{\dot{W}}=\frac{W(t_n)-W(t_{n-1})}{\tau}.\tag{3.3.10}$$

则全离散格式(3.3.8)可表示为

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial U}{\partial t}, v_h\right)+a(U^n, v_h)+b(U^{n-1}, U^n, v_h)\\=\ &\left(G(U^{n-1})\tilde{\dot{W}}, v_h\right),\ \forall v_h \in V_0^h,\end{aligned}\tag{3.3.11}$$

其中$U(x,0)=u_0^h(x)$.

令l表示单元$K\in\mathcal{T}^h$的一条边. 若l在边界$\partial\mathcal{D}$上, 定义单元$K_{\max}^l=K_{\min}^l=K^l$. 否则, 令$l=\bar{K}_1^l\cap\bar{K}_2^l$, 其中$K_1^l, K_2^l$表示两个共同拥有边$l$的单元. 现在定义跳跃函数$[\mathcal{D}]_l=\mathcal{D}_{K_1^l}-\mathcal{D}_{K_2^l}$, 进一步定义$\left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right]_l$是$u_h$在边$l$上的导数的跳跃. 对$l=\bar{K}_1^l\cap\bar{K}_1^2$, 令

$$A_l=\Big((\nu\nabla u_h)_{K_1^l}-(\nu\nabla u_h)_{K_2^l}\Big)n,$$

其中n是$l=\bar{K}_1^l\cap\bar{K}_1^2$上的单位向量, 方向背向$K_1^l$.

下面我们对有限元半离散格式(3.3.7)的后验误差估计进行分析和证明.

定理 3.3.1 设u和u_h分别是方程(3.3.6)和式(3.3.7)的解, 若$E\int_0^s|u-u_h|_1^2\mathrm{d}t<+\infty$, 则存在常数$C_0>0$和$C_1>0$满足

$$\begin{aligned}&E\|(u-u_h)(s)\|_{0,\mathcal{D}}^2+E\int_0^s|u-u_h|_1^2\mathrm{d}t\\\leqslant\ &C_0\bar{\eta}_0^2+C_1\left(\bar{\eta}^2+\bar{\eta}_1^2+\bar{\eta}_2^2\right),\end{aligned}\tag{3.3.12}$$

其中

$$\bar{\eta}^2=E\int_0^s\sum_{l\cap\partial\mathcal{D}=\emptyset}\int_{K_{\max}^l}|A_l|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

$$
\begin{aligned}
\bar{\eta}_0^2 &= E\|u_0-u_0^h\|_{0,\mathcal{D}}^2 = E\|(u-u_h)(0)\|_{0,\mathcal{D}}^2,\\
\bar{\eta}_1^2 &= E\int_0^s\sum_K\int_K h_K^4\left|\nabla\left(\frac{\partial u_h}{\partial t}\right)\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t,\\
\bar{\eta}_2^2 &= E\int_0^s\sum_K\int_K h_K^4|\nabla\cdot(u_h\cdot\nabla)u_h|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

证明 令$e=u-u_h$. $e_I=\pi e\in S_h$是$e(x,t)$的加权Clement-type插值算子. 根据方程(3.3.6)和式(3.3.7)有

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial(u-u_h)}{\partial t},e\right)+a(u-u_h,e)+b(u,u-u_h,e)\\
=\;&\left(G(\cdot,u)\dot{W},e\right)-\left(\frac{\partial u_h}{\partial t},e\right)-a(u_h,e)-b(u,u_h,e)\\
=\;&-\left(\frac{\partial u_h}{\partial t},e\right)+\left(G(u)\dot{W},e\right)-\ a(u_h,e)-b(u_h,u_h,e)-b(u-u_h,u_h,e)\\
=\;&-\left(\frac{\partial u_h}{\partial t},e-e_I\right)+\left(G(u)\dot{W},e\right)-a(u_h,e-e_I)-\\
&b(u_h,u_h,e-e_I)-\left(G(u_h)\dot{W},e_I\right)-b(u-u_h,u_h,e)+\\
&\left[-\left(\frac{\partial u_h}{\partial t},e_I\right)-a(u_h,e_I)-b(u_h,u_h,e_I)+\left(G(u_h)\dot{W},e_I\right)\right]\\
=\;&-\left(\frac{\partial u_h}{\partial t},e-e_I\right)-a(u_h,e-e_I)-b(u_h,u_h,e-e_I)-b(u-u_h,u_h,e)+\\
&\left(G(u)\dot{W}-G(u_h)\dot{W},e\right)+\left(G(u_h)\dot{W},e-e_I\right).
\end{aligned}
$$

由$b(u,e,e)=0$可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\|(u-u_h)(s)\|_{0,\mathcal{D}}^2+c\int_0^s|u-u_h|_1^2\mathrm{d}t\\
\leqslant\;&\frac{1}{2}\|(u-u_h)(0)\|_{0,\mathcal{D}}^2+\int_0^s\left(\frac{\partial(u-u_h)}{\partial t},u-u_h\right)\mathrm{d}t+\int_0^s a(u-u_h,u-u_h)\mathrm{d}t\\
=\;&\frac{1}{2}\|(u-u_h)(0)\|_{0,\mathcal{D}}^2-\int_0^s a(u_h,e-e_I)\mathrm{d}t-\int_0^s\left(\frac{\partial u_h}{\partial t},e-e_I\right)\mathrm{d}t-\\
&\int_0^s b(u_h,u_h,e-e_I)\mathrm{d}t-\int_0^s b(u-u_h,u_h,e)\mathrm{d}t+\\
&\int_0^s\left(G(u)\dot{W}-G(u_h)\dot{W},e\right)\mathrm{d}t+\int_0^s\left(G(u_h)\dot{W},e-e_I\right)\mathrm{d}t\\
=\;&\frac{1}{2}\eta_0^2+\sum_{i=1}^6 I_i.
\end{aligned}
$$

为了方便, 这里给出如下符号的定义:

$$
\begin{aligned}
\eta^2 &= \int_0^s\sum_{l\cap\partial\mathcal{D}=\emptyset}\int_{K_{\max}^l}|A_l|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t,\\
\eta_0^2 &= \|u_0-u_0^h\|_{0,\mathcal{D}}^2=\|(u-u_h)(0)\|_{0,\mathcal{D}}^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\eta_1^2 &= \int_0^s \sum_K \int_K h_K^4 \left|\nabla\left(\frac{\partial u_h}{\partial t}\right)\right|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t,\\
\eta_2^2 &= \int_0^s \sum_K \int_K h_K^4 |\nabla\cdot(u_h\cdot\nabla)u_h|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

对$\forall\delta>0$ (令$\alpha=1$), 根据引理3.3.3和引理3.3.4有

$$
\begin{aligned}
I_1 &= -\int_0^s a(u_h, e-e_I)\mathrm{d}t = -\int_0^s\int_{\mathcal{D}} \nu\nabla u_h\cdot\nabla(e-e_I)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&= -\int_0^s \sum_K \int_{\partial K} \nu\frac{\partial u_h}{\partial n}(e-e_I)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = -\int_0^s \sum_{l\cap\partial\mathcal{D}=\emptyset}\int_l A_l(e-e_I)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&\lesssim -\int_0^s \sum_{l\cap\partial\mathcal{D}=\emptyset}\int_{K^l_{\max}} |A_l|(h^{-1}_{K^l_{\max}}|e-e_I|+|\nabla(e-e_I)|)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&\lesssim \delta^{-1}\int_0^s \sum_{l\cap\partial\mathcal{D}=\emptyset}\int_{K^l_{\max}} |A_l|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\\
&\quad\ \delta\int_0^s\sum_K\int_K h_K^{-2}|e-e_I|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\delta\int_0^s\sum_K\int_K|\nabla(e-e_I)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&\lesssim \delta^{-1}\eta^2+\delta\int_0^s|u-u_h|_1^2\mathrm{d}t.
\end{aligned}\tag{3.3.13}
$$

对$\forall\delta>0$, 利用引理3.3.4有

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^s\int_{\mathcal{D}}\left(-\frac{\partial u_h}{\partial t}\right)(e-e_I)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&\lesssim \delta^{-1}\int_0^s\sum_K\int_K h_K^4\left|\nabla\left(\frac{\partial u_h}{\partial t}\right)\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\delta\int_0^s\sum_K\int_K|\nabla e|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&\lesssim \delta^{-1}\eta_1^2+\delta\int_0^s|u-u_h|_1^2\mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

其中

$$
\int_0^s\sum_K\int_K|\nabla e|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\lesssim\int_0^s|e|_1^2\mathrm{d}t=\int_0^s|u-u_h|_1^2\mathrm{d}t.
$$

对于I_3, 根据引理3.3.4有

$$
\begin{aligned}
I_3 &= -\int_0^s\int_{\mathcal{D}}(u_h\cdot\nabla)u_h\cdot(e-e_I)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&\lesssim \delta^{-1}\int_0^s\sum_K\int_K h_K^4|\nabla\cdot(u_h\cdot\nabla)u_h|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\delta\int_0^s\sum_K\int_K|\nabla e|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&\lesssim \delta^{-1}\eta_2^2+\delta\int_0^s|u-u_h|_1^2\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

对于I_4有

$$
\begin{aligned}
I_4 &= -\int_0^s\int_{\mathcal{D}}((u-u_h)\cdot\nabla)u_h\cdot e\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&= -\int_0^s\int_{\mathcal{D}}((u-u_h)\cdot\nabla)u_h\cdot(u-u_h)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\lesssim\int_0^s|u-u_h|_1^2\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

根据上述的推导, 可以得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\|(u-u_h)(s)\|_{0,\mathcal{D}}^2+c\int_0^s|u-u_h|_1^2\mathrm{d}t\\ \lesssim\ &\frac{1}{2}\eta_0^2+\delta^{-1}(\eta^2+\eta_1^2+\eta_2^2)+(3\delta+1)\int_0^s|u-u_h|_1^2\mathrm{d}t+I_5+I_6.\end{aligned}$$

根据离散Gronwall引理1.2.3, 存在正常数C_0,C_1,C_2,C_3使得

$$\begin{aligned}&\|(u-u_h)(s)\|_{0,\mathcal{D}}^2+\int_0^s|u-u_h|_1^2\mathrm{d}t\\ \leqslant\ &C_0\eta_0^2+C_1\left(\eta^2+\eta_1^2+\eta_2^2\right)+C_2I_5+C_3I_6.\end{aligned}\tag{3.3.14}$$

在估计式(3.3.14)两边同时取期望有

$$\begin{aligned}&E\|(u-u_h)(s)\|_{0,\mathcal{D}}^2+E\int_0^s|u-u_h|_1^2\mathrm{d}t\\ \leqslant\ &C_0\bar{\eta}_0^2+C_1\left(\bar{\eta}^2+\bar{\eta}_1^2+\bar{\eta}_2^2\right)+C_2EI_5+C_3EI_6.\end{aligned}\tag{3.3.15}$$

对于随机项I_5和I_6, 注意当$G(u)\in L_2^0$时, $\int_0^s G(u)\mathrm{d}W$是均值为0的连续鞅, 即有

$$E\int_0^s G(u)\mathrm{d}W=0,$$

则有

$$E\int_0^s\left(G(u)\dot{W},e\right)\mathrm{d}t=\int_{\mathcal{D}}\left(E\int_0^s G(u)\mathrm{d}W\cdot e\right)\mathrm{d}x=0.$$

于是$EI_5=EI_6=0.$

综上所述, 根据估计式(3.3.15)可得

$$E\|(u-u_h)(s)\|_{0,\mathcal{D}}^2+E\int_0^s|u-u_h|_1^2\mathrm{d}t\leqslant C_0\bar{\eta}_0^2+C_1\left(\bar{\eta}^2+\bar{\eta}_1^2+\bar{\eta}_2^2\right).$$

证毕. ¶

为了给出估计误差的上下界, 这里介绍以下两个引理, 其证明可见文献[44, 45].

引理 3.3.5 令$l=\bar{K}_1^l\cap\bar{K}_2^l$表示单元$K_1^l\in\mathcal{T}^h$和$K_2^l\in\mathcal{T}^h$共有的边. 对于任意函数$A$, 存在函数$\mathcal{D}_l\in H_0^1(\mathcal{D})$使得$\mathcal{D}_l|_{\mathcal{D}\setminus(\bar{K}_1^l\cup\bar{K}_2^l)}=0$, 且有

$$\begin{aligned}\int_l A\mathcal{D}_l\mathrm{d}x&=\int_{K_{\max}^l}|A|^2\mathrm{d}x,\\ \|\mathcal{D}_l\|_{0,\infty}&\lesssim h_{K_{\max}^l}|A|,\\ \int_{K_1^l\cup K_2^l}|\nabla\mathcal{D}_l|^2\mathrm{d}x&\lesssim\int_{K_{\max}^l}|A|^2\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

引理 3.3.6 对于任意单元$K\in\mathcal{T}^h$和任意函数f, 存在K上的多项式$\mathcal{D}_K$满足$\mathcal{D}_K|_{\partial K}=0$, 且有

$$\int_K f\mathcal{D}_K\mathrm{d}x=\int_K h_K^2|f|^2\mathrm{d}x,$$

$$\begin{aligned}\|\mathcal{D}_K\|_{0,\infty} &\lesssim h_K^2|f|,\\ \int_K |\nabla \mathcal{D}_K|^2\mathrm{d}x &\lesssim \int_K h_K^2|f|^2\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

事实上, 函数$\mathcal{D}_l$在引理3.3.5中可以定义为$\mathcal{D}_l=\alpha_l\lambda_1\lambda_2$, 其中$\lambda_1,\lambda_2$是三角单元在$l$上的基函数, 并且

$$\alpha_l=\int_{K^l_{\max}}|A|^2\mathrm{d}x\Big/\int_l A\lambda_1\lambda_2\mathrm{d}x.$$

类似地, 令$\mathcal{D}_K$在引理3.3.6中定义为$\mathcal{D}_K=\alpha_K\lambda_1\lambda_2\lambda_3$, 其中$\lambda_1,\lambda_2$和$\lambda_3$是三角单元在$K$上的基函数, 并且

$$\alpha_K=\int_K h_K^2|f|^2\mathrm{d}x\Big/\int_K f\lambda_1\lambda_2\lambda_3\mathrm{d}x.$$

如上定义的函数满足引理3.3.5和引理3.3.6中的所有结论.

定理 3.3.2 设u和u_h分别是式(3.3.6)和式(3.3.7)的解, 若

$$E\int_0^s|u-u_h|_1^2\mathrm{d}t<+\infty,$$

则有

$$\bar{\eta}^2=E\int_0^s\sum_{l\cap\partial\mathcal{D}=\emptyset}\int_{K^l_{\max}}|A_l|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\lesssim E\int_0^s|u-u_h|_1^2\mathrm{d}t+\bar{\epsilon},\tag{3.3.16}$$

其中

$$\bar{\epsilon}=E\int_0^s\sum_K\int_K h_K^2|H-\bar{H}|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

$$H=G(u)\dot{W}-(u\cdot\nabla)u-\frac{\partial u}{\partial t},$$

这里

$$\bar{H}=\bar{H}|_K=\int_K H\mathrm{d}x/|K|.$$

证明 根据引理3.3.5和跳跃函数A_l的定义有

$$\begin{aligned}\eta^2 &= \int_0^s\sum_{l\cap\partial\mathcal{D}=\emptyset}\int_{K^l_{\max}}|A_l|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_0^s\sum_{l\cap\partial\mathcal{D}=\emptyset}\int_l A_l\mathcal{D}_l\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ &= \int_0^s\sum_{l\cap\partial\mathcal{D}=\emptyset}\int_l\left[\frac{\partial u_h}{\partial n}-\frac{\partial u_h}{\partial n}\right]_l\mathcal{D}_l\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ &= \int_0^s\sum_{l\cap\partial\mathcal{D}=\emptyset}\int_{\partial K_1^l\cup\partial K_2^l}\left(\frac{\partial u_h}{\partial n}-\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathcal{D}_l\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ &= \int_0^s\sum_{l\cap\partial\mathcal{D}=\emptyset}\int_{K_1^l\cup K_2^l}(\nabla u_h-\nabla u)\nabla\mathcal{D}_l\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\\ &\quad\int_0^s\sum_{l\cap\partial\mathcal{D}=\emptyset}\int_{K_1^l\cup K_2^l}\left(G(u)\dot{W}-(u\cdot\nabla)u-\frac{\partial u}{\partial t}\right)\mathcal{D}_l\mathrm{d}x\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^s \sum_{l\cap\partial\mathcal{D}=\emptyset} \int_{K_1^l\cup K_2^l} (\nabla u_h - \nabla u)\nabla\mathcal{D}_l \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_0^s \sum_{l\cap\partial\mathcal{D}=\emptyset} \int_{K_1^l\cup K_2^l} H\mathcal{D}_l \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&= I_1 + I_2,
\end{aligned}
$$

其中

$$
H = G(u)\dot{W} - (u\cdot\nabla)u - \frac{\partial u}{\partial t}.
$$

根据引理3.3.2有

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^s \sum_{l\cap\partial\mathcal{D}=\emptyset} \int_{K_1^l\cup K_2^l} (\nabla u_h - \nabla u)\nabla\mathcal{D}_l \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&\lesssim \int_0^s \sum_{l\cap\partial\mathcal{D}=\emptyset} \int_{K_1^l\cup K_2^l} |\nabla u_h - \nabla u|\cdot|\nabla\mathcal{D}_l| \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&\lesssim \theta^{-\alpha}\int_0^s \sum_{l\cap\partial\mathcal{D}=\emptyset} \int_{K_1^l\cup K_2^l} |\nabla(u_h - u)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \\
&\quad \theta\int_0^s \sum_{l\cap\partial\mathcal{D}=\emptyset} \int_{K_1^l\cup K_2^l} |\nabla\mathcal{D}_l|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&\lesssim \theta^{-\alpha}\int_0^s \sum_{l\cap\partial\mathcal{D}=\emptyset} \int_{K_1^l\cup K_2^l} |\nabla(u_h - u)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \\
&\quad C\theta\int_0^s \sum_{l\cap\partial\mathcal{D}=\emptyset} \int_{K_{\max}^l} |A_l|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&\lesssim \theta^{-\alpha}\int_0^s |u - u_h|_1^2 \mathrm{d}t + C\theta\eta^2.
\end{aligned}
$$

类似地, 可以得到

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^s \sum_{l\cap\partial\mathcal{D}=\emptyset} \int_{K_1^l\cup K_2^l} H\mathcal{D}_l \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&\lesssim \theta^{-\alpha}\int_0^s \sum_{l\cap\partial\mathcal{D}=\emptyset} \int_{K_1^l\cup K_2^l} |A_l|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \\
&\quad \theta\int_0^s \sum_{l\cap\partial\mathcal{D}=\emptyset} \int_{K_1^l\cup K_2^l} h_{K_{\max}^l}^2 |H|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&\lesssim \theta^{-\alpha}\eta^2 + \theta L,
\end{aligned}
$$

其中

$$
L = \int_0^s \sum_K \int_K h_{K_{\max}^l}^2 |H|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t.
$$

考虑$H = \bar{H} + (H - \bar{H})$, 有

$$
\begin{aligned}
L &= \int_0^s \sum_K \int_K h_\tau^2 |H|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&\lesssim \int_0^s \sum_K \int_K h_\tau^2 |\bar{H}|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_0^s \sum_K \int_K h_\tau^2 |H - \bar{H}|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant I + \epsilon,
\end{aligned}
$$

其中

$$\epsilon=\int_0^s\sum_K\int_K h_\tau^2|H-\bar{H}|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

根据引理3.3.6和$\mathcal{D}_K$的性质有

$$\begin{aligned}I&=\int_0^s\sum_K\int_K h_\tau^2|\bar{H}|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_0^s\sum_K\int_K\bar{H}\mathcal{D}_K\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&=\int_0^s\sum_K\int_K H\mathcal{D}_K\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^s\sum_K\int_K(\bar{H}-H)\mathcal{D}_K\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&=L_1+L_2.\end{aligned}$$

根据引理3.3.2和引理3.3.6, 对任意的$\theta_1>0$, 有

$$\begin{aligned}L_1&=\int_0^s\sum_K\int_K H\mathcal{D}_K\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&=\int_0^s\sum_K\int_K\left(G(u)\dot{W}-(u\cdot\nabla)u-\frac{\partial u}{\partial t}\right)\mathcal{D}_K\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&=\int_0^s\sum_K\int_K(\nabla u-\nabla u_h)\nabla\mathcal{D}_K\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&\leqslant C\int_0^s\sum_K\int_K|\nabla(u-u_h)|\cdot|\nabla\mathcal{D}_K|\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&\lesssim\theta_1^{-\alpha}\int_0^s\sum_K\int_K|\nabla(u-u_h)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\theta_1\int_0^s\sum_K\int_K|\nabla\mathcal{D}_K|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&\lesssim\theta_1^{-\alpha}\int_0^s|u-u_h|_1^2\mathrm{d}t+\theta_1\int_0^s\sum_K\int_K h_K^2|\bar{H}|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&\approx\theta_1^{-\alpha}\int_0^s|u-u_h|_1^2\mathrm{d}t+\theta_1 I.\end{aligned}$$

类似地, 根据引理3.3.2和引理3.3.6, 对于任意的$\theta_2>0$, 可以得到

$$\begin{aligned}L_2&=\int_0^s\sum_K\int_K(\bar{H}-H)\mathcal{D}_K\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&\leqslant\int_0^s\sum_K\int_K(\bar{H}-H)\cdot\|\mathcal{D}_K\|_{0,\infty}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&\lesssim\int_0^s\sum_K\int_K|\bar{H}-H|h_K^2|\bar{H}|\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&\lesssim\theta_2^{-\alpha}\int_0^s h_K^2|\bar{H}|^2\mathrm{d}t+\theta_2\int_0^s\sum_K\int_K h_K^2|H-\bar{H}|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&\lesssim\theta_2^{-\alpha}I+\theta_2\epsilon.\end{aligned}$$

综上所述可以推导出

$$I\lesssim\theta_1^{-\alpha}\int_0^s|u-u_h|_1^2\mathrm{d}t+(\theta_1+\theta_2^{-\alpha})I+\theta_2\epsilon,$$

即有

$$\eta^2 \lesssim \int_0^s |u-u_h|_1^2 \mathrm{d}t + \epsilon. \tag{3.3.17}$$

证毕. ¶

综上所述, 若u满足定理3.1.1中解的存在性条件, $u_h \in S_h$, 初始值u_0满足假设3.1.1中的条件, 则有

$$\begin{aligned} & E\int_0^s |u-u_h|_1^2 \mathrm{d}t - \bar{\epsilon}* \lesssim \bar{\eta}^2 \\ \lesssim \quad & E\int_0^s |u-u_h|_1^2 \mathrm{d}t + \bar{\epsilon}, \quad \text{其中}\bar{\epsilon}, \bar{\epsilon}* = o(h^2). \end{aligned} \tag{3.3.18}$$

3.3.3 全离散格式的后验误差估计

本节我们对有限元全离散格式(3.3.11)进行后验误差估计.

定理 3.3.3 设u是方程(3.3.6)的解, U和U^n的定义参见式(3.3.9)和全离散格式(3.3.11). 如果

$$E\left(\int_0^s |u-U^n|_1^2 \,\mathrm{d}t\right) < +\infty,$$

则存在正常数$\tilde{C}_0, \tilde{C}_1, \tilde{C}_2$满足

$$\begin{aligned} & E\|(u-U)(s)\|_{0,\mathcal{D}}^2 + E\int_0^s |u-U^n|_1^2 \mathrm{d}t \\ \leqslant \quad & \tilde{C}_0\tilde{\eta}_0^2 + \tilde{C}_1\left(\tilde{\eta}^2 + \tilde{\eta}_2^2 + \tilde{\eta}_3^2\right) + \tilde{C}_2\tilde{\eta}_1^2, \end{aligned} \tag{3.3.19}$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{A}_l &= \left((\nu\nabla U^n)_{K_1^l} - (\nu\nabla U^n)_{K_2^l}\right) n, \\ \tilde{\eta}^2 &= E\int_0^s \sum_{l\cap\partial\mathcal{D}=\emptyset} \int_{K_{\max}^l} |\tilde{A}_l|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t, \\ \tilde{\eta}_0^2 &= E\|(u-U)(0)\|_{0,\mathcal{D}}^2, \\ \tilde{\eta}_1^2 &= E\int_0^s |U-U^n|_1^2 \mathrm{d}t, \\ \tilde{\eta}_2^2 &= E\int_0^s \sum_K \int_K h_K^4 \left|\nabla\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)\right|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t, \\ \tilde{\eta}_3^2 &= E\int_0^s \sum_K \int_K h_K^4 |\nabla\cdot(U^{n-1}\cdot\nabla)U^n|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

证明 定义误差$\tilde{e} = u - U$. $\tilde{e}_I = \pi\tilde{e} \in S_h$表示$\tilde{e}(x,t)$的加权Clement-type插值算子. 根据方程(3.3.6)和式(3.3.11)有

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial(u-U)}{\partial t}, u-U\right) + a(u-U^n, u-U^n) \\ = \quad & \left(\frac{\partial(u-U)}{\partial t}, \tilde{e}-\tilde{e}_I\right) + a(u-U^n, \tilde{e}-\tilde{e}_I) + \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial(u-U)}{\partial t},\tilde{e}_I\right)+a(u-U^n,\tilde{e}_I)+a(u-U^n,U-U^n)\\
=\;&-\left(\frac{\partial U}{\partial t},\tilde{e}-\tilde{e}_I\right)+\left(G(u)\dot{W},\tilde{e}-\tilde{e}_I\right)-b(u,u,\tilde{e}-\tilde{e}_I)-\\
&a(U^n,\tilde{e}-\tilde{e}_I)+a(u-U^n,U-U^n)+b(U^{n-1},U^n,\tilde{e}_I)-\\
&b(u,u,\tilde{e}_I)+\left(G(u)\dot{W}-G(U^{n-1})\tilde{\dot{W}},\tilde{e}_I\right)\\
=\;&-\left(\frac{\partial U}{\partial t},\tilde{e}-\tilde{e}_I\right)-a(U^n,\tilde{e}-\tilde{e}_I)+a(u-U^n,U-U^n)-\\
&b(U^{n-1},U^n,\tilde{e}-\tilde{e}_I)-b(U^{n-1},u-U^n,\tilde{e})-b(u-U^{n-1},u,\tilde{e})+\\
&\left(G(u)\dot{W},\tilde{e}-\tilde{e}_I\right)+\left(G(u)\dot{W}-G(U^{n-1})\tilde{\dot{W}},\tilde{e}_I\right).
\end{aligned}
$$

令$\eta_0^2=\|(u-U)(0)\|_{0,\mathcal{D}}^2$, 则有

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\|(u-U)(s)\|_{0,\mathcal{D}}^2+c\int_0^s|u-U^n|_1^2\mathrm{d}t\\
\leqslant\;&\frac{1}{2}\|(u-U)(0)\|_{0,\mathcal{D}}^2+\int_0^s\left(\frac{\partial(u-U)}{\partial t},u-U\right)\mathrm{d}t+\int_0^s a(u-U^n,u-U^n)\mathrm{d}t\\
=\;&\frac{1}{2}\eta_0^2-\int_0^s a(U^n,\tilde{e}-\tilde{e}_I)\mathrm{d}t+\int_0^s a(u-U^n,U-U^n)\mathrm{d}t-\int_0^s\left(\frac{\partial U}{\partial t},\tilde{e}-\tilde{e}_I\right)\mathrm{d}t-\\
&\int_0^s b(U^{n-1},U^n,\tilde{e}-\tilde{e}_I)\mathrm{d}t-\int_0^s b(U^{n-1},u-U^n,\tilde{e})\mathrm{d}t-\int_0^s b(u-U^{n-1},u,\tilde{e})\mathrm{d}t+\\
&\int_0^s\left(G(u)\dot{W},\tilde{e}-\tilde{e}_I\right)\mathrm{d}t+\int_0^s\left(G(u)\dot{W}-G(U^{n-1})\tilde{\dot{W}},\tilde{e}_I\right)\mathrm{d}t\\
=\;&\frac{1}{2}\eta_0^2+\sum_{i=1}^{8}I_i,
\end{aligned}
$$

即有

$$
\frac{1}{2}E\|(u-U)(s)\|_{0,\mathcal{D}}^2+cE\int_0^s|u-U^n|_1^2\mathrm{d}t\lesssim\frac{1}{2}\tilde{\eta}_0^2+\sum_{i=1}^{8}EI_i.
$$

类似于定理3.3.1的证明, 根据不等式(3.3.13)有, 对$\forall\delta>0$,

$$
\begin{aligned}
EI_1\;&=\;-E\int_0^s a(U^n,\tilde{e}-\tilde{e}_I)\mathrm{d}t=-E\int_0^s\sum_{l\cap\partial\mathcal{D}=\emptyset}\int_l\tilde{A}_l(\tilde{e}-\tilde{e}_I)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&\lesssim\;\delta^{-1}\tilde{\eta}^2+\delta E\int_0^s|u-U^n|_1^2\mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

其中

$$
\tilde{\eta}^2\;=\;E\int_0^s\sum_{l\cap\partial\mathcal{D}=\emptyset}\int_{K_{\max}^l}|\tilde{A}_l|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t.
$$

类似地, 对于I_2有

$$
EI_2\;=\;E\int_0^s a(u-U^n,U-U^n)\mathrm{d}t
$$

$$
\begin{aligned}
&\lesssim \delta E\int_0^s |u-U^n|_1^2\mathrm{d}t+\delta^{-1}E\int_0^s |U-U^n|_1^2\mathrm{d}t\\
&= \delta E\int_0^s |u-U^n|_1^2\mathrm{d}t+\delta^{-1}\tilde{\eta}_1^2,
\end{aligned}
$$

其中

$$
\tilde{\eta}_1^2 = E\int_0^s |U-U^n|_1^2\mathrm{d}t.
$$

根据引理3.3.4, 对$\forall\delta>0$有

$$
\begin{aligned}
EI_3 &= E\int_0^s \left(-\frac{\partial U}{\partial t},\tilde{e}-\tilde{e}_I\right)\mathrm{d}t\\
&\lesssim \delta^{-1}E\int_0^s\sum_K\int_K h_K^4\left|\nabla\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\delta E\int_0^s\sum_K\int_K|\nabla\tilde{e}|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&\lesssim \delta^{-1}\tilde{\eta}_2^2+\delta E\int_0^s|u-U|_1^2\mathrm{d}t\\
&\lesssim \delta^{-1}\tilde{\eta}_2^2+\delta\left(E\int_0^s|U^n-U|_1^2\mathrm{d}t+E\int_0^s|u-U^n|_1^2\mathrm{d}t\right)\\
&\lesssim \delta^{-1}\tilde{\eta}_2^2+\delta\tilde{\eta}_1^2+\delta E\int_0^s|u-U^n|_1^2\mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

其中

$$
\tilde{\eta}_2^2 = E\int_0^s\sum_K\int_K h_K^4\left|\nabla\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t.
$$

类似地, 根据引理3.3.4有

$$
\begin{aligned}
EI_4 &= -E\int_0^s b(U^{n-1},U^n,\tilde{e}-\tilde{e}_I)\mathrm{d}t\\
&\lesssim \delta^{-1}E\int_0^s\sum_K\int_K h_K^4|\nabla\cdot(U^{n-1}\cdot\nabla)U^n|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\delta E\int_0^s\sum_K\int_K|\nabla\tilde{e}|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&\lesssim \delta^{-1}\tilde{\eta}_3^2+\delta E\int_0^s|u-U|_1^2\mathrm{d}t\\
&\lesssim \delta^{-1}\tilde{\eta}_3^2+\delta\tilde{\eta}_1^2+\delta E\int_0^s|u-U^n|_1^2\mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

其中

$$
\tilde{\eta}_3^2=E\int_0^s\sum_K\int_K h_K^4|\nabla\cdot(U^{n-1}\cdot\nabla)U^n|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t.
$$

对于I_5, 根据算子$b(\cdot,\cdot,\cdot)$的定义可以推出

$$
\begin{aligned}
EI_5 &= -E\int_0^s b(U^{n-1},u-U^n,\tilde{e})\mathrm{d}t\\
&\lesssim \delta E\int_0^s|u-U^n|_1^2\mathrm{d}t+\delta^{-1}\int_0^s E\|u-U\|_{0,\mathcal{D}}^2\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

注意

$$
\begin{aligned}
&\int_0^s |u-U^{n-1}|_1^2 \mathrm{d}t \\
\lesssim\ & \int_0^s |u-U^n|_1^2 \mathrm{d}t + \int_0^s |U^n-U^{n-1}|_1^2 \mathrm{d}t \\
\lesssim\ & \int_0^s |u-U^n|_1^2 \mathrm{d}t + \sum_{n=1}^N \int_{t_{n-1}}^{t_n} |U^n-U^{n-1}|_1^2 \mathrm{d}t \\
\lesssim\ & \int_0^s |u-U^n|_1^2 \mathrm{d}t + \sum_{n=1}^N k|U^n-U^{n-1}|_1^2.
\end{aligned}
$$

同理, 对I_6可得

$$
\begin{aligned}
EI_6 &= -E\int_0^s b(u-U^{n-1},u,\tilde{e})\mathrm{d}t \\
&\lesssim \delta E\int_0^s |u-U^{n-1}|_1^2 \mathrm{d}t + \delta^{-1}E\int_0^s \|u-U\|_{0,\mathcal{D}}^2 \mathrm{d}t \\
&\lesssim \delta E\int_0^s |u-U^n|_1^2 \mathrm{d}t + \delta\sum_{n=1}^N kE|U^n-U^{n-1}|_1^2 + \delta^{-1}\int_0^s E\|u-U\|_{0,\mathcal{D}}^2 \mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

注意当$G(u)\in L_2^0$时, $\int_0^s G(u)\mathrm{d}W$是均值为0的连续鞅, 则有

$$
E\int_0^s \left(G(u)\dot{W},\tilde{e}\right)\mathrm{d}t = \int_{\mathcal{D}}\left(E\int_0^s G(u)\mathrm{d}W\cdot\tilde{e}\right)\mathrm{d}x = 0.
$$

于是有

$$
EI_7 = E\int_0^s \left(G(u)\dot{W},\tilde{e}-\tilde{e}_I\right)\mathrm{d}t = 0.
$$

对于I_8, 根据等式(3.3.10)有

$$
G(U^{n-1})\tilde{\dot{W}} = G(U^{n-1})\frac{W(t_n)-W(t_{n-1})}{\tau} = \frac{1}{\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n} G(U^{n-1})\mathrm{d}W(t).
$$

类似于对I_7的处理, 可以得到

$$
\begin{aligned}
&E\int_0^s \left(G(U^{n-1})\tilde{\dot{W}},\tilde{e}_I\right)\mathrm{d}t \\
=\ & \sum_{n=1}^N E\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\frac{1}{\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n} G(U^{n-1})\,\mathrm{d}W,\tilde{e}_I\right)\mathrm{d}t = 0,
\end{aligned}
$$

即有

$$
EI_8 = E\int_0^s \left(G(u)\dot{W}-G(U^{n-1})\tilde{\dot{W}},\tilde{e}_I\right)\mathrm{d}t = 0.
$$

综上所述, 有如下的结论:

$$
\frac{1}{2}E\|(u-U)(s)\|_{0,\mathcal{D}}^2 + cE\int_0^s |u-U^n|_1^2 \mathrm{d}t
$$

$$\lesssim \frac{1}{2}\tilde{\eta}_0^2+\delta^{-1}\left(\tilde{\eta}^2+\tilde{\eta}_2^2+\tilde{\eta}_3^2\right)+\left(\delta^{-1}+2\delta\right)\tilde{\eta}_1^2+6\delta E\int_0^s|u-U^n|_1^2\mathrm{d}t+$$
$$2\delta^{-1}\int_0^s E\|u-U\|_{0,\mathcal{D}}^2\mathrm{d}t+\delta\sum_{n=1}^N kE|U^n-U^{n-1}|_1^2.$$

利用离散Gronwall引理1.2.3, 则存在适当的常数$c>0$使得

$$E\|(u-U)(s)\|_{0,\mathcal{D}}^2+E\int_0^s|u-U^n|_1^2\mathrm{d}t\leqslant \tilde{C}_0\tilde{\eta}_0^2+\tilde{C}_1\left(\tilde{\eta}^2+\tilde{\eta}_2^2+\tilde{\eta}_3^2\right)+\tilde{C}_2\tilde{\eta}_1^2.$$

证毕. ¶

定理 3.3.4 设u是方程(3.3.6)的解, U和U^n的定义参见式(3.3.9)和全离散格式(3.3.11). 如果

$$E\int_0^s|u-U^n|_1^2\mathrm{d}t<+\infty,$$

则有

$$\tilde{\eta}^2=E\int_0^s\sum_{l\cap\partial\mathcal{D}=\emptyset}\int_{K_{\max}^l}|\tilde{A}_l|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\lesssim E\int_0^s|u-U^n|_1^2\mathrm{d}t+\tilde{\epsilon}, \tag{3.3.20}$$

其中

$$\tilde{\epsilon}=E\int_0^s\sum_K\int_K h_K^2|H-\bar{H}|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$
$$H=G(u)\dot{W}-(u\cdot\nabla)u-\frac{\partial u}{\partial t}.$$

证明 此定理的证明类似于定理3.3.2的证明, 这里不做赘述. ¶

同理, 若u满足定理3.1.1中解的存在性条件, $U^h\in S_h$, 初始值u_0满足假设3.1.1中的条件, 则有

$$E\int_0^s|u-U^n|_1^2\mathrm{d}t-\tilde{\epsilon}*$$
$$\lesssim \tilde{\eta}^2\lesssim E\int_0^s|u-U^n|_1^2\mathrm{d}t+\tilde{\epsilon},\quad 其中\tilde{\epsilon},\tilde{\epsilon}*=o(h^2). \tag{3.3.21}$$

定理 3.3.5 设u是方程(3.3.6)的解, U和U^n的定义参见式(3.3.9)和全离散格式(3.3.11). 令

$$E\int_0^s|u-U^n|_1^2\mathrm{d}t<+\infty.$$

对每个$V\in C(0,T;W^{1,2}(\mathcal{D}))$, 在每个区间$[t_{n-1},t_n]$ $(n=1,2,\cdots,N)$上都表示时间仿射, 则有

$$\tilde{\eta}_1^2=E\int_0^s|U-U^n|_1^2\mathrm{d}t$$
$$\lesssim E\int_0^s|u-U^n|_1^2\mathrm{d}t+E\int_0^s|u-V|_1^2\mathrm{d}t. \tag{3.3.22}$$

证明 根据U的定义式(3.3.9)有

$$(U-U^n)(x,t)=\frac{t-t_n}{\tau}\left(U^n(x)-U^{n-1}(x)\right),\ t\in I_n=[t_{n-1},t_n],$$

即有

$$|U-U^n|\leqslant|U^n-U^{n-1}|,\quad t\in I_n=[t_{n-1},t_n].$$

那么可得

$$\begin{aligned}&\int_0^s|U-U^n|_1^2\mathrm{d}t\\=&\sum_K\sum_{n=1}^N\int_K\int_{t_{n-1}}^{t_n}|\nabla U-\nabla U^n|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\\leqslant&\sum_K\sum_{n=1}^N\tau\int_K|\nabla U^n-\nabla U^{n-1}|^2\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{3.3.23}$$

考虑对所有的$a>0$, $b\in\mathbb{R}^n$和$c\in\mathbb{R}^n$,

$$\frac{a}{2}|b|\leqslant\int_0^a|b+ct|\mathrm{d}t.\tag{3.3.24}$$

考虑时间区间$I_n=[t_{n-1},t_n]$. 根据不等式(3.3.24), 对$\tau=t_n-t_{n-1}>0$有

$$|b|\leqslant\frac{2}{\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}|b+c(t_{n-1}-t)|\mathrm{d}t.\tag{3.3.25}$$

令

$$b=\nabla U^n-\nabla V^{n-1},\quad c=\frac{\nabla V^n-\nabla V^{n-1}}{\tau}.$$

那么根据不等式(3.3.25)可以得到

$$\begin{aligned}&|\nabla U^n-\nabla V^{n-1}|\\\leqslant&\frac{2}{\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left|\nabla U^n-\nabla V^{n-1}+\frac{\nabla V^n-\nabla V^{n-1}}{\tau}(t_{n-1}-t)\right|\mathrm{d}t.\end{aligned}\tag{3.3.26}$$

对于$t\in I_n=[t_{n-1},t_n]$ $(n=1,2,\cdots,N)$,

$$V(x,t)=\frac{t-t_{n-1}}{\tau}V^n(x)+\frac{t_n-t}{\tau}V^{n-1}(x),$$

即有

$$U^n-V=U^n-V^{n-1}+\frac{V^n-V^{n-1}}{\tau}(t_{n-1}-t).\tag{3.3.27}$$

根据式(3.3.26)和式(3.3.27)有

$$|\nabla U^n-\nabla V^{n-1}|\leqslant\frac{2}{\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}|\nabla U^n-\nabla V|\,\mathrm{d}t.\tag{3.3.28}$$

类似地, 对于时间区间$I_n=[t_{n-2},t_{n-1}]$有

$$|\nabla U^n-\nabla V^{n-1}|\leqslant\frac{2}{\tau}\int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}}|\nabla U^n-\nabla V|\,\mathrm{d}t.\tag{3.3.29}$$

则根据不等式(3.3.26), 式(3.3.28)和式(3.3.29), 可以推导出

$$\begin{aligned}
\tilde{\eta}_1^2 &= E\int_0^s |U-U^n|_1^2 \mathrm{d}t \\
&\leqslant E\sum_K \sum_{n=1}^N k_n \int_K |\nabla U^n - \nabla U^{n-1}|^2 \mathrm{d}x \\
&\lesssim E\sum_K \sum_{n=1}^N \int_K \nabla(U^n - V^{n-1})\mathrm{d}x + \\
&\quad\ E\sum_K \sum_{n=1}^N \int_K \nabla(U^{n-1} - V^{n-1})\mathrm{d}x \\
&\lesssim E\int_{\mathcal{D}}\int_0^s |\nabla U^n - \nabla V|^2 \,\mathrm{d}t\mathrm{d}x \\
&\lesssim E\int_{\mathcal{D}}\int_0^s |\nabla u - \nabla U^n|^2 \,\mathrm{d}t\mathrm{d}x + E\int_{\mathcal{D}}\int_0^s |\nabla u - \nabla V|^2 \,\mathrm{d}t\mathrm{d}x \\
&= E\int_0^s |u-U^n|_1^2 \,\mathrm{d}t + E\int_0^s |u-V|_1^2 \,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

证毕. ¶

3.4 研究进展评述

近些年来, 关于后验误差分析的确定性偏微分方程的研究已经很丰富(见文献[46–49]), 但对于随机偏微分方程的有限元后验误差估计相对较少.

(1) 在文献[50]中, X.Yang, R.Qi, Y.Duan研究了如下

$$\begin{cases}
\mathrm{d}u(t,x) = Au(t,x) + [F(u(t,x)) + G(u(t-\tau,x))]\mathrm{d}t \\
\qquad\qquad +\sigma(u(t,x))\mathrm{d}W, \quad (t,x)\in(0,T)\times\mathcal{D}, \\
u(t,x) = 0, \quad (t,x)\in(0,T)\times\partial\mathcal{D}, \\
u(t,x) = \phi(t,x), \quad (t,x)\in[-\tau,0]\times\bar{\mathcal{D}},
\end{cases} \tag{3.4.1}$$

随机偏微延迟方程的有限元近似后验误差估计. 结合标准Euler时间步长方法和Galerkin方法, 推导出能量范数的后验界定, 并给出半离散和全离散情况的全局最大估量.

(2) 在文献[51]中, X.Yang, Y.Duan, Y.Guo应用加权Clement-type插入算子, 研究了如下

$$\begin{cases}
\partial_t u - \nu\Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p = F(\cdot,u) + G(\cdot,u)\dot{W}_t, \quad (x,t)\in\varOmega\times(0,T), \\
\nabla\cdot u = 0, \quad (x,t)\in\varOmega\times(0,T), \\
u = 0, \quad (x,t)\in\partial\varOmega\times(0,T).
\end{cases} \tag{3.4.2}$$

随机方程的有限元近似的后验误差估计.

(3) 在文献[52]中, Y.Duan, X.Yang研究了如下

$$\partial_t u = \Delta u - (u \cdot \nabla)u - \nabla p + f(u) + [(\sigma \cdot \nabla)u - \nabla \check{p} + g(u)]\dot{W}, \tag{3.4.3}$$
$$u(0) = u_0, \nabla \cdot u = 0.$$

含有扰动项的随机N-S方程的有限元近似. 空间上的离散采用有限元方法, 时间上的离散采用向后Euler方法. 应用一般的L_2映射算子近似噪声项. 在合适的假设下, 证明了随机N-S方程全离散格式的误差估计.

第4章　随机弹性方程有限元方法

弹性方程是最典型的一类四阶双曲型方程, 它可以用来描述自然界以及结构工程中的振动现象, 例如在研究梁的横振动和气体超音速流中薄板的振荡时会遇到这类方程. 本章将以分别带有Q-Wiener过程噪声项和带有Brownian片噪声项的两类随机弹性方程为例研究双曲型随机偏微分方程的有限元理论分析方法.

对于带有Q-Wiener过程噪声项的随机弹性方程, 首先基于半群理论, 将其转化为抽象发展方程的形式, 研究其温和解的存在性、唯一性和正则性. 然后基于C^0和C^1元, 分别给出随机弹性方程的半离散和全离散有限元格式. 利用确定性弹性方程的有限元误差估计, 给出随机弹性方程半离散和全离散有限元格式强误差估计的分析方法. 将半离散问题和全离散问题转化为一个统一的形式, 利用Kolmogorov方程给出这两个离散问题弱误差的抽象表达形式, 基于抽象误差表达式, 给出半离散和全离散有限元格式的弱误差估计的分析方法.

对于带有Brownian片噪声项的随机弹性方程, 基于弹性方程Green函数, 将其转化为关于Green函数的随机积分的形式, 研究其积分解的存在性、唯一性和正则性. 首先通过对噪声项的分片常数逼近, 构造原方程的正则化方程, 对正则化随机方程进行有限元研究. 然后利用弹性方程Green函数的性质分别给出随机双曲方程与正则化方程之间的误差估计以及正则化方程有限元误差估计的理论分析.

4.1　弹性方程有限元方法理论分析

因为随机弹性方程解的正则性比较低, 随机弹性方程有限元误差估计需要线性弹性方程有限元低阶范数误差作为工具, 而已有的关于弹性方程有限元方法的文献, 例如文献[53], 研究的都是弹性方程有限元方法高阶范数下的误差估计, 其结果不能直接应用到随机弹性方程的有限元误差估计中, 所以本节首先研究弹性方程的低阶范数误差估计.

4.1.1　弹性方程解的定性分析

本小节首先将弹性方程转化成等价的抽象发展方程的形式, 然后应用半群理论讨论线性弹性方程解的定性问题. 考虑方程

$$\begin{cases} \ddot{w} + \Delta^2 w = 0, & (t,x) \in (0,T) \times \mathcal{D}, \\ w = \Delta w = 0, & (t,x) \in (0,T) \times \partial\mathcal{D}, \\ w(0,x) = f,\ \dot{w}(0,x) = g, & x \in \mathcal{D}, \end{cases} \tag{4.1.1}$$

其中$\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$是凸区域, $\dot{w}$表示时间导数, f, g是已知函数.

下面分别研究方程(4.1.1)解的空间和时间上的正则性. 设算子$A = \Delta^2$, 则方程(4.1.1)的解在空间上有下列正则性估计.

引理 4.1.1 方程(4.1.1)的解w满足正则性

$$\|D_t^m \dot{w}(t)\|_\nu^2 + \|D_t^m w(t)\|_{\nu+2}^2 = \|g^m\|_\nu^2 + \|f^m\|_{\nu+2}^2, \tag{4.1.2}$$

其中D_t^m表示关于t的m阶导数, $m = 0, 1, \cdots$,

$$\begin{cases} f^m = A^n f,\ g^m = A^n g, & 当\ m = 2n, \\ f^m = A^n g,\ g^m = A^{n+1} f, & 当\ m = 2n+1. \end{cases}$$

证明 只给出$m = 2n$情况下的证明, $m = 2n+1$的情况类似可证. 方程(4.1.1)两边对t求m次导数, 然后乘以$D_t^m A^{\frac{\nu}{2}} \dot{w}$, 得

$$(D_t^m \ddot{w}, D_t^m A^{\frac{\nu}{2}} \dot{w}) + (D_t^m A w, D_t^m A^{\frac{\nu}{2}} \dot{w}) = 0. \tag{4.1.3}$$

因此

$$D_t \|D_t^m \dot{w}\|_\nu^2 + D_t \|D_t^m w\|_{\nu+2}^2 = 0.$$

对上式在区间$[0, t]$上积分可得

$$\|D_t^m \dot{w}(t)\|_\nu^2 + \|D_t^m w(t)\|_{\nu+2}^2 = \|D_t^m \dot{w}(0)\|_\nu^2 + \|D_t^m w(0)\|_{\nu+2}^2.$$

由此显然可得

$$D_t^m \dot{w}(0) = D_t^{2n} \dot{w}(0) = (-A)^n g = (-1)^n g^m,$$
$$D_t^m w(0) = D_t^{2n} w(0) = (-A)^n f = (-1)^n f^m.$$

因此$m = 2n$的情况得证. ¶

下面将方程(4.1.1)转化为抽象发展方程的形式, 然后讨论其解在范数$|||v|||_\alpha$下的正则性, 其中范数$|||v|||_\alpha$定义为

$$|||v|||_\alpha^2 := \|v_1\|_\alpha^2 + \|v_2\|_{\alpha-2}^2, \quad v = (v_1, v_2)^T \in \mathcal{H}^\alpha := \dot{H}^\alpha \times \dot{H}^{\alpha-2},\ \forall \alpha \in \mathbb{R}. \tag{4.1.4}$$

设空间$\mathcal{H} = \mathcal{H}^0 = \dot{H}^0 \times \dot{H}^{-2}$, 所对应的范数为$|||\cdot||| = |||\cdot|||_0$. 设算子$\mathcal{A}$定义如下:

$$D(\mathcal{A}) = \mathcal{H}, \quad \mathcal{A}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix},\ \forall \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \in D(\mathcal{A}). \tag{4.1.5}$$

则$\mathcal{A}$生成一个强连续的算子半群$\mathcal{S}(t)$, 具有形式

$$\mathcal{S}(t) = \mathrm{e}^{t\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{A}t) & \frac{1}{\sqrt{A}}\sin(\sqrt{A}t) \\ -\sqrt{A}\sin(\sqrt{A}t) & \cos(\sqrt{A}t) \end{pmatrix}.$$

设$w_1 = w, w_2 = \dot{w}$, $Y = (w_1, w_2)^{\mathrm{T}}$, 则方程(4.1.1)的抽象表示形式为

$$\dot{Y}(t) = \mathcal{A}Y(t), \quad Y(0) = Y_0 = (f, g)^{\mathrm{T}}. \tag{4.1.6}$$

由定理1.3.10, 上式方程的弱解为

$$Y(t)=\mathcal{S}(t)Y_0. \tag{4.1.7}$$

方程(4.1.6)的弱解式(4.1.7)在时间上的正则性有如下结论成立.

引理 4.1.2 对于$0\leqslant\mu\leqslant\frac{1}{2}$, 存在正常数$C$, 使得对$\forall t,s\in[0,T],t\neq s$和$\forall Y_0\in\mathcal{H}^2$,

$$|||A^{\mu}(Y(t)-Y(s))|||=|||A^{\mu}(\mathcal{S}(t)-\mathcal{S}(s))Y_0|||\leqslant C|t-s|^{1-2\mu}|||Y_0|||_2. \tag{4.1.8}$$

证明 根据范数$|||\cdot|||$的定义可得,

$$\begin{aligned}
&|||A^{\mu}(Y(t)-Y(s))|||^2=|||A^{\mu}(\mathcal{S}(t)-\mathcal{S}(s))Y_0|||^2\\
=\ &\|(\cos(\sqrt{A}t)-\cos(\sqrt{A}s))A^{\mu}f+(\sin(\sqrt{A}t)-\sin(\sqrt{A}s))A^{\mu-\frac{1}{2}}g\|^2+\\
&\|(\sin(\sqrt{A}t)-\sin(\sqrt{A}s))A^{\mu}f-(\cos(\sqrt{A}t)-\cos(\sqrt{A}s))A^{\mu-\frac{1}{2}}g\|^2\\
\leqslant\ &2\Big(\|(\sin(\sqrt{A}t)-\sin(\sqrt{A}s))A^{\mu-\frac{1}{2}}g\|^2+\|(\cos(\sqrt{A}t)-\cos(\sqrt{A}s))A^{\mu-\frac{1}{2}}g\|^2+\\
&\|(\cos(\sqrt{A}t)-\cos(\sqrt{A}s))A^{\mu}f\|^2+\|(\sin(\sqrt{A}t)-\sin(\sqrt{A}s))A^{\mu}f\|^2\Big).
\end{aligned}$$

设λ_j和ϕ_j, $j=1,2,3,\cdots$, 是算子A的特征值及其对应的正交特征向量, 则有

$$(\sin(\sqrt{A}t)-\cos(\sqrt{A}s))A^{\mu-\frac{1}{2}}g=\sum_{j=1}^{\infty}(\sin(\lambda_j^{\frac{1}{2}}t)-\sin(\lambda_j^{\frac{1}{2}}s))\lambda_j^{\mu-\frac{1}{2}}(g,\phi_j)\phi_j.$$

由上式得

$$\begin{aligned}
&\|(\sin(\sqrt{A}t)-\sin(\sqrt{A}s))A^{\mu-\frac{1}{2}}g\|^2\\
=\ &|t-s|^{2-4\mu}\sum_{j=1}^{\infty}(|t-s|\sqrt{\lambda_j})^{4\mu-2}(\sin(\sqrt{\lambda_j}t)-\sin(\sqrt{\lambda_j}s))^2(g,\phi_j)^2\\
\leqslant\ &C|t-s|^{2-4\mu}\sum_{j=1}^{\infty}(g,\phi_j)^2=C|t-s|^{2-4\mu}\|g\|^2.
\end{aligned} \tag{4.1.9}$$

这里用到了三角函数的正则性

$$|\sin(\sqrt{\lambda_j}t)-\sin(\sqrt{\lambda_j}s)|\leqslant c(|t-s|\sqrt{\lambda_j})^{\nu},\ \forall 0\leqslant\nu\leqslant 1.$$

类似可以得到

$$\|(\cos(\sqrt{A}t)-\cos(\sqrt{A}s))A^{\mu-\frac{1}{2}}g\|^2\leqslant C|t-s|^{2-4\mu}\|g\|^2, \tag{4.1.10}$$

和

$$\|(\cos(\sqrt{A}t)-\cos(\sqrt{A}s))A^{\mu}f\|^2+\|(\sin(\sqrt{A}t)-\sin(\sqrt{A}s))A^{\mu}f\|^2\leqslant C|t-s|^{2-4\mu}\|f\|_2^2. \tag{4.1.11}$$

由上述估计式(4.1.9), 式(4.1.10)和式(4.1.11), 引理得证. ¶

4.1.2 基于C^1元的弹性方程半离散有限元方法

本小节根据弹性方程的弱变分形式, 给出方程(4.1.1)基于C^1元的半离散有限元格式, 并讨论其误差估计.

设$\{\mathcal{T}_h\}$是区域$\mathcal{D}$的正则性剖分, 其中h是剖分尺度. 设$S_h^2 \subset H_0^1(\mathcal{D}) \cap H^2(\mathcal{D})$是基于剖分$\{\mathcal{T}_h\}$上分片多项式组成的$C^1$空间. 为了方便起见, 取简单的多项式空间, 例如

(1) 对于$d=1$, $S_h^2 = \{$分片Hermite多项式$\}$,

(2) 对于$d=2$, $S_h^2 = \{$Hsieh-Clough-Tocher三角多项式$\}$.

关于这两个有限元的构造请参考文献[5, 6]. 由Céa引理1.4.4和插值误差估计定理1.4.6, 它们具有如下逼近性质(证明见文献[54]).

$$\inf_{\chi_h \in S_h^2} \|v-\chi_h\|_{H^2} \leqslant Ch^2\|v\|_{H^4}, \forall v \in H^4 \cap H_0^1. \tag{4.1.12}$$

设P_h是从空间$\dot{H}^{-2}$到S_h^2的投影算子, Λ_h是离散的双调和算子, 它们分别定义如下

$$(P_h v, \chi) = (v, \chi), \forall v \in \dot{H}^{-2},\ \chi \in S_h^2,$$

$$(\Lambda_h v_h, \chi) = (\Delta v_h, \Delta \chi),\ \forall \chi \in S_h^2.$$

显然Λ_h是空间S_h^2上的一个正定算子, 其分数次幂算子定义为

$$\Lambda_h^r v = \sum_{j=1}^{N_h} \lambda_{j,h}^r (v, \phi_{j,h})\phi_{j,h}, \forall v \in S_h^2.$$

定义离散范数

$$\|v\|_{h,r} = \|\Lambda_h^{\frac{r}{4}} v\| = (\Lambda_h^{\frac{r}{2}} v, v)^{\frac{1}{2}} = (\sum_{j=1}^{N_h} \lambda_{j,h}^{\frac{r}{2}} (v, \phi_{j,h})^2)^{\frac{1}{2}},$$

其中N_h是离散空间S_h^2的维数, $\{\phi_{j,h}, \lambda_{j,h}\}_{j=1}^{N_h}$是算子$\Lambda_h$在空间$S_h^2$上的一组特征对序列.

设$R_h: \dot{H}^2 \to S_h^2$是一个正交投影算子, 定义如下

$$(\Delta R_h v, \Delta \chi) = (\Delta v, \Delta \chi), \qquad \forall \chi \in S_h^2,$$

类似于插值算子的误差估计, 有

$$\|(R_h - I)v\|_r \leqslant Ch^{s-r}\|v\|_s,\ r=0,1,2,\ s=2,3,4,\ v \in \dot{H}^s. \tag{4.1.13}$$

线性弹性方程的弱变分形式为: 求$w_1, w_2 \in H^2 \cap H_0^1$, 使得

$$\begin{cases} (\Delta \dot{w}_1, \Delta \chi_1) - (\Delta w_2, \Delta \chi_1) = 0, & \chi_1 \in H^2 \cap H_0^1, \\ (\dot{w}_2, \chi_2) + (\Delta w_1, \Delta \chi_2) = 0, & \chi_2 \in H^2 \cap H_0^1. \end{cases} \tag{4.1.14}$$

下面基于分片多项式空间S_h^2, 给出方程(4.1.1)的半离散有限元格式: 求$w_{h,1}, w_{h,2} \in S_h^2$, 使得

$$
\begin{cases}
(\Delta \dot{w}_{h,1}(t), \Delta\chi_1) - (\Delta w_{h,2}(t), \Delta\chi_1) = 0, \quad \forall \chi_1 \in S_h^2, \\
(\dot{w}_{h,2}(t), \chi_2) + (\Delta w_{h,1}(t), \Delta\chi_2) = 0, \qquad \forall \chi_2 \in S_h^2, \\
w_{h,1}(0) = P_h f, \qquad w_{h,2}(0) = P_h g.
\end{cases} \tag{4.1.15}
$$

类似于式(4.1.7), 半离散有限元问题(4.1.15)可表示为

$$
\dot{Y}_h(t) = \mathcal{A}_h Y_h(t), t > 0,\ Y_h(0) = Y_{h,0}.
$$

其中$\mathcal{A}_h$, Y_h和$Y_{h,0}$分别定义如下,

$$
\mathcal{A}_h := \begin{pmatrix} 0 & I \\ -\Lambda_h & 0 \end{pmatrix}, \qquad Y_h := \begin{pmatrix} w_{h,1} \\ w_{h,2} \end{pmatrix}, \qquad Y_{h,0} := \begin{pmatrix} P_h f \\ P_h g \end{pmatrix}.
$$

类似于$\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_h$也生成强连续算子半群$\mathcal{S}_h(t)$,

$$
\mathcal{S}_h(t) = \mathrm{e}^{t\mathcal{A}_h} = \begin{pmatrix} \cos(t\sqrt{\Lambda_h}) & \Lambda_h^{-\frac{1}{2}} \sin(t\sqrt{\Lambda_h}) \\ -\Lambda_h^{\frac{1}{2}} \sin(t\sqrt{\Lambda_h}) & \cos(t\sqrt{\Lambda_h}) \end{pmatrix}. \tag{4.1.16}
$$

所以方程(4.1.15)的解有表示形式

$$
Y_h(t) = \mathcal{S}_h(t) Y_{h,0}.
$$

如下定理给出了半离散有限元方法式(4.1.15)的最佳误差估计.

定理 4.1.1 设$Y_0 = [f, g]^{\mathrm{T}}$和

$$
\mathcal{K}_h(t)Y_0 = (\cos(t\sqrt{\Lambda_h})P_h - \cos(t\sqrt{A}))f + (\Lambda_h^{-\frac{1}{2}} \sin(t\sqrt{\Lambda_h})P_h - A^{-\frac{1}{2}} \sin(t\sqrt{A}))g,
$$

则有估计

$$
||\mathcal{K}_h(t)Y_0|| \leqslant Ch^{\frac{4}{3}\beta} |||Y_0|||_{2\beta}, \quad t \geqslant 0,\ \beta \in [0, 3]. \tag{4.1.17}
$$

证明 设$e_1 = w_{h,1} - w_1$, 则$e_1 = \mathcal{K}_h(t)Y_0$. 根据插值定理1.2.12, 只需证明$\beta = 0$和$\beta = 3$这两种情况. 首先证明$\beta = 0$的情况.

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{K}_h(t)Y_0\|^2 &= \|e_1\|^2 \leqslant \|w_{h,1}(t)\|^2 + \|w_1(t)\|^2 \\
&\leqslant \left(\|P_h f\|^2 + \|P_h g\|_{-2}^2 + \|f\|^2 + \|g\|_{-2}^2\right).
\end{aligned} \tag{4.1.18}
$$

根据范数$\|\cdot\|_{h,-2}$的定义可以得到

$$
\|\Lambda_h^{-1} P_h g\| \leqslant \|g\|_{-2}. \tag{4.1.19}
$$

因此

$$\|\mathcal{K}_h(t)Y_0\|^2 \leqslant C(\|f\|^2+\|g\|_{-2}^2)=C\||Y_0\||_0^2. \tag{4.1.20}$$

下面证明$\beta=3$的情况. 令

$$\begin{aligned}&\theta_1=w_{h,1}-R_hw_1,\ \rho_1=(R_h-I)w_1,\\&\theta_2=w_{h,2}-P_hw_2,\ \rho_2=(P_h-I)w_2,\\&e_i=\theta_i+\rho_i,\ i=1,2.\end{aligned}$$

式(4.1.14)与式(4.1.15)相减得,

$$\begin{cases}(\Delta\dot{e}_1,\Delta\chi_1)-(\Delta e_2,\Delta\chi_1)=0, & \chi_1\in S_h^2,\\ (\dot{e}_2,\chi_2)+(\Delta e_1,\Delta\chi_2)=0, & \chi_2\in S_h^2.\end{cases}$$

因此

$$\begin{cases}(\Delta\dot{\theta}_1,\Delta\chi_1)-(\Delta\theta_2,\Delta\chi_1)=(\Delta\rho_2,\Delta\chi_1), & \forall\chi_1\in S_h^2,\\ (\dot{\theta}_2,\chi_2)+(\Delta\theta_1,\Delta\chi_2)=0, & \forall\chi_2\in S_h^2.\end{cases}$$

因为$\theta_1,\theta_2\in S_h^2$, 取$\chi_1=\Lambda_h^{-1}\theta_1$和$\chi_2=\Lambda_h^{-1}\theta_2$得

$$\|\theta(t)_1\|^2+\|\Lambda_h^{-\frac{1}{2}}\theta_2(t)\|^2\leqslant C\left\{\|\theta_1(0)\|_{h,0}^2+\|\Lambda_h^{-\frac{1}{2}}\theta_2(0)\|^2+\int_0^t\|R_h\rho_2(s)\|_{h,0}^2\mathrm{d}s\right\}. \tag{4.1.21}$$

因为$\theta_2(0)=0$并且

$$\begin{aligned}&\|\theta_1(0)\|=\|R_hf-P_hf\|=\|P_h(I-R_h)f\|\leqslant\|(I-R_h)f\|\leqslant Ch^4\|f\|_4,\\&\|R_h\rho_2\|=\|P_h(I-R_h)w_2\|\leqslant\|(I-R_h)w_2\|\leqslant Ch^4\|w_2\|_4\leqslant Ch^4\|Y_0\||_6,\end{aligned}$$

所以有

$$\|\theta_1\|\leqslant Ch^4\||Y_0\||_6. \tag{4.1.22}$$

最后由三角不等式可得$\beta=3$的情况. ¶

4.1.3 基于C^1元的弹性方程全离散有限元方法

这一小节在4.1.2节半离散格式的基础上对时间变量进行离散, 构造问题(4.1.1)的全离散有限元格式, 进而讨论其误差估计.

设$\bar{\partial}W_{ih}^n=(W_{ih}^n-W_{ih}^{n-1})/k,\ i=1,2,$ 问题(4.1.1)的全离散有限元格式为

$$\begin{cases}(\Delta\bar{\partial}W_{1h}^n,\Delta\vartheta_1)-(\Delta W_{2h}^n,\Delta\vartheta_1)=0, & \vartheta_1\in S_h^2,\\ (\bar{\partial}W_{2h}^n,\vartheta_2)+(\Delta W_{1h}^n,\Delta\vartheta_2)=0, & \vartheta_2\in S_h^2,\\ W_{1h}^0=P_hf,\quad W_{2h}^0=P_hg.\end{cases} \tag{4.1.23}$$

离散方程(4.1.23)的算子表达形式为

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} W_{1h}^n \\ W_{2h}^n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} W_{1h}^{n-1} \\ W_{2h}^{n-1} \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 0 & I \\ -\Lambda_h & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{1h}^n \\ W_{2h}^n \end{pmatrix}, \\ W_{1h}^0 = P_h f, \quad W_{2h}^0 = P_h g, \end{cases} \tag{4.1.24}$$

或者

$$W_h^n - W_h^{n-1} = k\mathcal{A}_h W_h^n, \quad W_h^0 = (P_h f, P_h g)^{\mathrm{T}}. \tag{4.1.25}$$

假定$S_{k,h}^n = r(k\mathcal{A}_h)^n = \begin{pmatrix} r_{1,n}(\Lambda_h) & r_{2,n}(\Lambda_h) \\ r_{3,n}(\Lambda_h) & r_{4,n}(\Lambda_h) \end{pmatrix}$. 设$r(\lambda) = 1/(1-\lambda)$, 则由递推关系式(4.1.25)可得

$$W_h^n = r(k\mathcal{A}_h)^n W_h^0 = S_{k,h}^n W_h^0, \quad W_h^0 = (P_h f, P_h g)^{\mathrm{T}}. \tag{4.1.26}$$

如下定理给出了全离散有限元方法(4.1.23), 即$w_1(t_n)$和W_{1h}^n之间的误差估计.

定理 4.1.2 设$Y_0 = (f, g)^{\mathrm{T}}$, 和

$$\mathcal{K}_{k,h}^{(n)} Y_0 = \left(r_{1,n}(\Lambda_h)P_h - \cos(t_n\sqrt{A})\right) f + \left(r_{2,n}(\Lambda_h)P_h - A^{-\frac{1}{2}}\sin(t_n\sqrt{A})\right) g,$$

则有

$$\|\mathcal{K}_{k,h}^{(n)} Y_0\| \leqslant C(k^{\frac{\alpha}{3}} + h^{\frac{4\alpha}{3}})|||Y_0|||_{2\alpha}, \ \alpha \in [0, 3]. \tag{4.1.27}$$

证明 设$e_1^n := \mathcal{K}_{k,h}^{(n)} Y_0 = W_{1h}^n - w_1(t_n)$. 根据插值定理1.2.12, 只需证明在$\alpha = 0$和$\alpha = 3$的两种情况下估计式(4.1.27)成立即可.

首先证明$\alpha = 0$的情况. 在方程(4.1.23)中取$\vartheta_i = \Lambda_h^{-1} W_{ih}^n, i = 1, 2$, 则有

$$(\Delta W_{1h}^n, \Delta\Lambda_h^{-1} W_{1h}^n) - (\Delta W_{1h}^{n-1}, \Delta\Lambda_h^{-1} W_{1h}^n) + (W_{2h}^n, \Lambda_h^{-1} W_{2h}^n) - (W_{2h}^{n-1}, \Lambda_h^{-1} W_{2h}^n) = 0.$$

由上式可得

$$\begin{aligned} \|W_{1h}^n\|^2 + \|\Lambda_h^{-\frac{1}{2}} W_{2h}^n\|^2 &\leqslant \|W_{1h}^{n-1}\|^2 + \|\Lambda_h^{-\frac{1}{2}} W_{2h}^{n-1}\|^2 \leqslant \cdots \leqslant \|W_{1h}^0\|^2 + \|\Lambda_h^{-\frac{1}{2}} W_{2h}^0\|^2 \\ &= \|P_h f\|^2 + \|\Lambda_h^{-\frac{1}{2}} P_h g\|^2, \end{aligned}$$

再由式(4.1.19)即证当$\alpha = 0$时估计式(4.1.27)成立, 事实上

$$\begin{aligned} \|\mathcal{K}_{k,h}^{(n)} Y_0\| &= \|e_1^n\| \leqslant C(\|w_1(t_n)\| + \|W_{1h}^n\|) \\ &\leqslant C(\|f\| + \|g\|_{-2} + \|P_h f\| + \|\Lambda_h^{-\frac{1}{2}} P_h g\|) \\ &\leqslant C(\|f\| + \|g\|_{-2}) \leqslant C|||Y_0|||. \end{aligned}$$

下面证明$\alpha = 3$的情况. 为分析简单, 引入下列符号:

$$\begin{aligned} \theta_1^n &= W_{1h}^n - R_h w_1(t_n), \qquad & \rho_1^n &= (R_h - I)w_1(t_n), \\ \theta_2^n &= W_{2h}^n - P_h w_2(t_n), \qquad & \rho_2^n &= (P_h - I)w_2(t_n). \end{aligned}$$

根据方程(4.1.14)和方程(4.1.23), 有

$$\begin{cases} (\Delta(\bar{\partial} W_{1h}^n - \dot{w}_1(t_n)), \Delta\vartheta_1) - (\Delta(W_{2h}^n - w_2(t_n)), \Delta\vartheta_1) = 0, \\ (\bar{\partial} W_{2h}^n - \dot{w}_2(t_n), \vartheta_2) + (\Delta(W_{1h}^n - w_1(t_n)), \Delta\vartheta_2) = 0. \end{cases}$$

进一步有

$$\begin{cases} (\Delta\bar{\partial}\theta_1^n, \Delta\vartheta_1) - (\Delta\theta_2^n, \Delta\vartheta_1) = (\Delta R_h(\dot{w}_1 - \bar{\partial} w_1)(t_n) - (\Delta R_h(I - P_h)w_2(t_n), \Delta\vartheta_1), \\ (\bar{\partial}\theta_2^n, \vartheta_2) + (\Delta\theta_1, \Delta\vartheta_2) = (P_h(\dot{w}_2 - \bar{\partial} w_2)(t_n), \vartheta_2). \end{cases}$$

在上式中取$\vartheta_1 = \Lambda_h^{-1}\theta_1^n$和$\vartheta_2 = \Lambda_h^{-1}\theta_2^n$, 可以得到

$$\begin{aligned} & (\bar{\partial}\theta_1^n, \theta_1^n) + (\bar{\partial}\theta_2^n, \Lambda_h^{-1}\theta_2^n) \\ = \ & \frac{\|\theta_1^n\|^2 - \|\theta_1^{n-1}\|^2}{k} + \frac{\|\Lambda_h^{-\frac{1}{2}}\theta_2^n\|^2 - \|\Lambda_h^{-\frac{1}{2}}\theta_2^{n-1}\|^2}{k} \\ \leqslant \ & C\Big(\|R_h(\dot{w}_1 - \bar{\partial} w_1)(t_n)\|^2 + \|R_h(I - P_h)w_2(t_n)\|^2 + \\ & \|\Lambda_h^{-\frac{1}{2}} P_h(\dot{w}_2 - \bar{\partial} w_2)(t_n)\|^2\Big) + C\Big(\|\theta_1^n\|^2 + \|\Lambda_h^{-\frac{1}{2}}\theta_2^n\|^2\Big). \end{aligned} \tag{4.1.28}$$

因此

$$\begin{aligned} \|\theta_1^n\|^2 + \|\Lambda_h^{-\frac{1}{2}}\theta_2^n\|^2 \ \leqslant \ & Ck\sum_{j=1}^n \Big(\|R_h(\dot{w}_1 - \bar{\partial} w_1)(t_j)\|^2 + \|R_h(R - P_h)w_2(t_j)\|^2 + \\ & \|\Lambda_h^{-\frac{1}{2}} P_h(\dot{w}_2 - \bar{\partial} w_2)(t_j)\|^2 + \|\theta_1^j\|^2 + \|\Lambda_h^{-\frac{1}{2}}\theta_2^j\|^2\Big). \end{aligned} \tag{4.1.29}$$

下面对上式右端各项分别估计. 首先由式(4.1.13), 式(4.1.19)和Taylor公式, 可以得到第一项和第三项的估计如下

$$\begin{aligned} & k\sum_{j=1}^n \|R_h(\dot{w}_1 - \bar{\partial} w_1)(t_j)\|^2 + k\sum_{j=1}^n \|\Lambda_h^{-\frac{1}{2}} P_h(\dot{w}_2 - \bar{\partial} w_2)(t_j)\|^2 \\ \leqslant \ & k\sum_{j=1}^n \Big(\|(\dot{w}_1 - \bar{\partial} w_1)(t_j)\|^2 + \|(I - R_h)(\dot{w}_1 - \bar{\partial} w_1)(t_j)\|^2 + \|P_h(\dot{w}_2 - \bar{\partial} w_2)(t_j)\|_{h,-2}^2\Big) \\ \leqslant \ & \sum_{j=1}^n k\Bigg(\Big\|\frac{1}{k}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(s - t_{j-1})\ddot{w}_1(s)\mathrm{d}s\Big\|^2 + \Big\|\frac{1}{k}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(s - t_{j-1})\ddot{w}_2(s)\mathrm{d}s\Big\|_{-2}^2 + \\ & \Big\|\frac{1}{k}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(I - R_h)(\dot{w}_1(t_j) - \dot{w}_1(s))\mathrm{d}s\Big\|^2\Bigg) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \quad Ck^2\left(\int_0^{t_n}\|\ddot{w}_1(s)\|^2\mathrm{d}s+\int_0^{t_n}\|\ddot{w}_2(s)\|_{-2}^2\mathrm{d}s\right)+Ch^8\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left\|\dot{w}_1(t_j)-\dot{w}_1(s)\right\|_4^2\mathrm{d}s\\
&\leqslant \quad Ck^2(\|f\|_6^2+\|g\|_4^2)+Ch^8(\|f\|_6^2+\|g\|_4^2)\\
&\leqslant \quad C(k^2+h^8)|||Y_0|||_6^2. \qquad (4.1.30)
\end{aligned}
$$

同理可得第二项的估计

$$
\begin{aligned}
&k\sum_{j=1}^{n}\|R_h(I-P_h)w_2(t_j)\|_0^2=k\sum_{j=1}^{n}\|P_h(I-R_h)w_2(t_j)\|_0^2\\
\leqslant\quad &Ch^8k\sum_{j=1}^{n}\|w_2(t_j)\|_4^2\leqslant Ch^8(\|f\|_6^2+\|g\|_4^2).
\end{aligned}
$$

最后根据以上估计和离散的Gronwall引理1.2.3, 可以得到

$$
\|\theta_1^n\|\leqslant C(h^4+k)|||Y_0|||_6.
$$

最终由三角不等式得到$\alpha=3$时的估计

$$
\|\mathcal{K}_{k,h}^{(n)}Y_0\|=\|e_1^n\|\leqslant C(h^4+k)|||Y_0|||_6.
$$

定理证毕. ¶

4.1.4 基于C^0元的弹性方程半离散有限元方法

本小节首先给出方程(4.1.1)基于C^0元的半离散有限元格式, 将其等价转化成发展方程的形式, 应用半群理论定理1.3.10写出半离散问题解的表示形式进而讨论其误差估计.

设$\mathcal{S}_h^1\subset H_0^1(\mathcal{D})$是基于剖分$\mathcal{T}_h$上, 由分片线性多项式组成的$C^0$有限元空间. 定义离散的Laplace算子$\Delta_h:S_h^1\to S_h^1$,

$$
\langle\Delta_h v_h,w_h\rangle=\langle\nabla v_h,\nabla w_h\rangle,\ \forall v_h,w_h\in S_h^1, \qquad (4.1.31)
$$

和投影算子$\mathcal{P}_h$: $\dot{H}^{-1}\to\mathcal{S}_h^1$,

$$
(\mathcal{P}_h v,\chi)=(v,\chi),\forall v\in\dot{H}^{-1},\ \chi\in\mathcal{S}_h^1.
$$

进一步定义正交投影算子$\mathcal{R}_h:\dot{H}^1\to S_h^1$,

$$
(\nabla\mathcal{R}_h v,\nabla\chi)=(\nabla v,\nabla\chi),\ \forall v\in\dot{H}^1,\forall\chi\in\mathcal{S}_h^1,
$$

则类似于插值算子的误差估计定理1.4.6, 算子$\mathcal{R}_h$有估计

$$
\|(\mathcal{R}_h-I)v\|_r\leqslant Ch^{s-r}\|v\|_s,\quad r=0,1,\ s=1,2,\ v\in\dot{H}^s. \qquad (4.1.32)
$$

基于C^0元上的线性弹性方程的半离散有限元格式为: 求$w_{h,1},w_{h,2}\in S_h^1$, 使得

$$
\dot{Y}_h(t)=\mathcal{A}_hY_h(t),\qquad Y_h(0)=Y_{h,0}, \qquad (4.1.33)
$$

其中$\mathcal{A}_h$, Y_h和$Y_{h,0}$分别定义如下

$$\mathcal{A}_h := \begin{pmatrix} 0 & I \\ -\mathbb{A}_h & 0 \end{pmatrix}, \qquad Y_h := \begin{pmatrix} w_{h,1} \\ w_{h,2} \end{pmatrix}, \qquad Y_{h,0} := \begin{pmatrix} \mathcal{P}_h f \\ \mathcal{P}_h g \end{pmatrix},$$

其中$\mathbb{A}_h = \Delta_h^2$. 类似于算子$\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_h$生成强连续的算子半群$\mathcal{S}_h(t)$,

$$\mathcal{S}_h(t) = \mathrm{e}^{t\mathcal{A}_h} = \begin{pmatrix} \cos(t\sqrt{\mathbb{A}_h}) & \mathbb{A}_h^{-\frac{1}{2}}\sin(t\sqrt{\mathbb{A}_h}) \\ -\mathbb{A}_h^{\frac{1}{2}}\sin(t\sqrt{\mathbb{A}_h}) & \cos(t\sqrt{\mathbb{A}_h}) \end{pmatrix}, \tag{4.1.34}$$

因此方程(4.1.33)解的半群表达式为

$$Y_h(t) = \mathcal{S}_h(t)Y_{h,0}.$$

对于线性弹性方程(4.1.1)的有限元半离散格式(4.1.33), 有如下误差估计.

定理 4.1.3 设$Y_0 = [f, g]^{\mathrm{T}}$和

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_h(t)Y_0 &= (\cos(t\sqrt{\mathbb{A}_h})\mathcal{P}_h - \cos(t\sqrt{A}))f + (\mathbb{A}_h^{-\frac{1}{2}}\sin(t\sqrt{\mathbb{A}_h})\mathcal{P}_h - A^{-\frac{1}{2}}\sin(t\sqrt{A}))g, \\ \mathcal{F}_h(t) &= (S_h(t)\mathcal{P}_h - S(t))Y_0, \end{aligned}$$

则有误差估计

$$\|\mathcal{K}_h(t)Y_0\| \leqslant Ch^{\frac{\beta-1}{2}}|||Y_0|||_\beta, \beta \in [1, 5], \tag{4.1.35}$$

$$|||\mathcal{F}_h(t)Y_0|||_1 \leqslant Ch^{\frac{\beta-1}{4}}|||Y_0|||_\beta, \beta \in [1, 5]. \tag{4.1.36}$$

证明 只给出式(4.1.35)的证明, 同理可证式(4.1.36). 设$w_1 = w$, $w_2 = \dot{w}_1$和$w_3 = -\Delta w_1$. 在这种情况下线性弹性方程(4.1.1)的变分问题为: 求$(w_1, w_2, w_3) \in H_0^1 \times H_0^1 \times H_0^1$, 使得

$$\begin{cases} (\dot{w}_2, \vartheta_1) + (\nabla w_3, \nabla\vartheta_1) = 0, & \vartheta_1 \in H_0^1, \\ (\nabla w_1, \nabla\vartheta_2) - (w_3, \vartheta_2) = 0, & \vartheta_2 \in H_0^1, \\ (\nabla\dot{w}_1, \nabla\vartheta_3) - (\nabla w_2, \nabla\vartheta_3) = 0, & \vartheta_3 \in H_0^1. \end{cases} \tag{4.1.37}$$

半离散问题的变分问题为: 求$(w_{h,1}, w_{h,2}, w_{h,3}) \in S_h^1 \times S_h^1 \times S_h^1$, 使得

$$\begin{cases} (\dot{w}_{h,2}, \vartheta_1) + (\nabla w_{h,3}, \nabla\vartheta_1) = 0, & \vartheta_1 \in \mathcal{S}_h^1, \\ (\nabla w_{h,1}, \nabla\vartheta_2) - (w_{h,3}, \vartheta_2) = 0, & \vartheta_2 \in \mathcal{S}_h^1, \\ (\nabla\dot{w}_{h,1}, \nabla\vartheta_3) - (\nabla w_{h,2}, \nabla\vartheta_3) = 0, & \vartheta_3 \in \mathcal{S}_h^1. \end{cases} \tag{4.1.38}$$

事实上, $w_1(t)$和$w_{h,1}(t)$分别具有如下形式,

$$w_1(t) = \cos(t\sqrt{A})f + A^{-\frac{1}{2}}\sin(t\sqrt{A})g, \quad w_{h,1}(t) = \cos(t\sqrt{\mathbb{A}_h})\mathcal{P}_h f + \mathbb{A}_h^{-\frac{1}{2}}\sin(t\sqrt{\mathbb{A}_h})\mathcal{P}_h g.$$

设$e_1(t) := w_{h,1}(t) - w_1(t) = \mathcal{K}_h(t)Y_0$. 根据插值理论定理1.2.12, 只需证明$\beta = 1$和$\beta = 5$两种情况成立.

先证$\beta = 1$的情况. 在式(4.1.38)中取$\vartheta_1 = \mathbb{A}_h^{-1} w_{h,2}$, $\vartheta_2 = \mathbb{A}_h^{-1/2} w_{h,2}$和$\vartheta_3 = \mathbb{A}_h^{-1/2} w_{h,1}$, 则有

$$(\dot{w}_{h,1}(t), w_{h,1}(t)) + (\dot{w}_{h,2}(t), \mathbb{A}_h^{-1} w_{h,2}(t)) = 0. \tag{4.1.39}$$

由上式可得估计

$$\|w_{h,1}(t)\|^2 + \|\mathbb{A}_h^{-1/2} w_{h,2}\|^2 \leqslant \|w_{h,1}(0)\|^2 + \|\mathbb{A}_h^{-1/2} w_{h,2}(0)\|^2 = \|\mathcal{P}_h f\|^2 + \|\mathbb{A}_h^{-1/2}\mathcal{P}_h g\|^2.$$

应用引理4.1.1和投影算子$\mathcal{P}_h$在空间H^{-1}的有界性, 即可得到

$$\begin{aligned}\|\mathcal{K}_h(t)Y_0\| &\leqslant \|w_{h,1}(t)\| + \|w_1(t)\| \leqslant C\left(\|\mathcal{P}_h f\| + \|\mathbb{A}_h^{-1/2}\mathcal{P}_h g\| + \|f\| + \|g\|_{-2}\right)\\ &\leqslant C(\|f\|_1 + \|g\|_{-1}) = C|||Y_0|||_1.\end{aligned} \tag{4.1.40}$$

下面将证明$\beta = 5$的情况. 为了分析方便, 引入记号

$$\begin{aligned}&\theta_1 = w_{h,1} - \mathcal{R}_h w_1,\ \rho_1 = (\mathcal{R}_h - I)w_1,\\ &\theta_2 = w_{h,2} - \mathcal{P}_h w_2,\ \rho_2 = (\mathcal{P}_h - I)w_2,\\ &\theta_3 = w_{h,3} - \mathcal{P}_h w_3,\ \rho_3 = (\mathcal{P}_h - I)w_3,\\ &e_i = w_{h,i} - w_i = \theta_i + \rho_i,\ i = 1, 2, 3.\end{aligned}$$

根据方程(4.1.37)和方程(4.1.38), 如下正交关系式成立

$$\begin{cases}(\dot{e}_2, \vartheta_1) + (\nabla e_3, \nabla\vartheta_1) = 0, & \forall\vartheta_1 \in \mathcal{S}_h^1,\\ (\nabla e_1, \nabla\vartheta_2) - (e_3, \vartheta_2) = 0, & \forall\vartheta_2 \in \mathcal{S}_h^1,\\ (\nabla\dot{e}_1, \nabla\vartheta_3) - (\nabla e_2, \nabla\vartheta_3) = 0, & \forall\vartheta_3 \in \mathcal{S}_h^1.\end{cases}$$

根据$e_i = \theta_i + \rho_i, i = 1, 2, 3$, 得

$$\begin{cases}(\dot{\theta}_2, \vartheta_1) + (\nabla\theta_3, \nabla\vartheta_1) = -(\dot{\rho}_2, \vartheta_1) - (\nabla\rho_3, \nabla\vartheta_1), & \forall\vartheta_1 \in \mathcal{S}_h^1,\\ (\nabla\theta_1, \nabla\vartheta_2) - (\theta_3, \vartheta_2) = -(\nabla\rho_1, \nabla\vartheta_2) + (\rho_3, \vartheta_2), & \forall\vartheta_2 \in \mathcal{S}_h^1,\\ (\nabla\dot{\theta}_1, \nabla\vartheta_3) - (\nabla\theta_2, \nabla\vartheta_3) = -(\nabla\dot{\rho}_1, \nabla\vartheta_3) + (\nabla\rho_2, \nabla\vartheta_3), & \forall\vartheta_3 \in \mathcal{S}_h^1.\end{cases}$$

由算子$\mathcal{R}_h$和$\mathcal{P}_h$的正交性, 又有

$$\begin{cases}(\dot{\theta}_2, \vartheta_1) + (\nabla\theta_3, \nabla\vartheta_1) = -(\nabla\rho_3, \nabla\vartheta_1), & \forall\vartheta_1 \in \mathcal{S}_h^1,\\ (\nabla\theta_1, \nabla\vartheta_2) - (\theta_3, \vartheta_2) = 0, & \forall\vartheta_2 \in \mathcal{S}_h^1,\\ (\nabla\dot{\theta}_1, \nabla\vartheta_3) - (\nabla\theta_2, \nabla\vartheta_3) = (\nabla\rho_2, \nabla\vartheta_3), & \forall\vartheta_3 \in \mathcal{S}_h^1.\end{cases}$$

类似于$\beta=1$的情况, 取$\vartheta_1=\mathbb{A}_h^{-1}\theta_2$, $\vartheta_2=\mathbb{A}_h^{-1/2}\theta_2$和$\vartheta_3=\mathbb{A}_h^{-1/2}\theta_1$, 然后将它们带入上式即可得到

$$(\dot{\theta}_1,\theta_1)+(\dot{\theta}_2,\mathbb{A}_h^{-1}\theta_2)=-(\mathcal{R}_h\rho_3,\mathbb{A}_h^{-1/2}\theta_2)+(\mathcal{R}_h\rho_2,\theta_1).$$

对上式在时间方向上进行积分得

$$\begin{aligned}
&\|\theta_1\|^2+\|\mathbb{A}^{-1/2}\theta_2\|^2\\
\leqslant\ & C\int_0^t\|\mathcal{R}_h\rho_3\|^2\mathrm{d}s+\int_0^t\|\mathcal{R}_h\rho_2\|^2\mathrm{d}s+\int_0^t\|\theta_1\|^2\mathrm{d}s+\int_0^t\|\mathbb{A}_h^{-1/2}\theta_2\|^2\mathrm{d}s\\
\leqslant\ & Ch^4\left(\int_0^t\|w_3\|_2^2\mathrm{d}s+\int_0^t\|w_2\|_2^2\mathrm{d}s\right)\leqslant Ch^4(\|f\|_4^2+\|g\|_2^2),
\end{aligned}$$

其中在这里用到了估计

$$\|\mathcal{R}_h\rho_i\|\leqslant\|(I-\mathcal{R}_h)w_i\|+\|(I-\mathcal{P}_h)w_i\|\leqslant 2\|(I-\mathcal{R}_h)w_i\|\leqslant Ch^2\|w_i\|_2, i=2,3.$$

最后根据三角不等式即可得到$\beta=5$情况下的结论. 定理证毕. ¶

4.1.5 基于C^0元的弹性方程全离散有限元方法

本小节根据4.1.4节半离散格式, 对时间变量进行离散, 构造方程(4.1.1)基于C^0元的全离散有限元格式并讨论其误差估计. 下面给出基于C^0元的线性弹性方程的全离散有限元格式. 设

$$\bar{\partial}W_{h,i}^n=(W_{h,i}^n-W_{h,i}^{n-1})/k,\ i=1,2,$$

则全离散格式为: 求$W_h^n=[W_{h,1}^n,W_{h,2}^n]'\in S_h^1\times S_h^1$, 使得

$$\begin{pmatrix} W_{h,1}^n\\ W_{h,2}^n\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} W_{h,1}^{n-1}\\ W_{h,2}^{n-1}\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} 0 & I\\ -\mathbb{A}_h & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} W_{h,1}^n\\ W_{h,2}^n\end{pmatrix},\tag{4.1.41}$$

或者

$$W_h^n-W_h^{n-1}=k\mathcal{A}_hW_h^n.\tag{4.1.42}$$

假定$S_{k,h}^n=r(k\mathcal{A}_h)^n=\begin{pmatrix} r_{1,n}(\mathbb{A}_h) & r_{2,n}(\mathbb{A}_h)\\ r_{3,n}(\mathbb{A}_h) & r_{4,n}(\mathbb{A}_h)\end{pmatrix}$. 令$r(\lambda)=1/(1-\lambda)$, 可以将递推公式(4.1.42)写成下列形式

$$W_h^n=r(k\mathcal{A}_h)^nW_h^0=S_{k,h}^nW_h^0,\tag{4.1.43}$$

其中$W_h^0=[\mathcal{P}_hf,\mathcal{P}_hg]^{\mathrm{T}}$.

基于C^0元的弹性方程全离散有限元格式(4.1.41)有如下误差估计.

定理 4.1.4 设$Y_0=(f,g)^{\mathrm{T}}$, $\mathcal{F}_{k,h}^n=(S_{k,h}^n\mathcal{P}_h-S(t_n))Y_0$,

$$\mathcal{K}_{k,h}^{(n)}Y_0=(r_{1,n}(\mathbb{A}_h)\mathcal{P}_h-\cos(t_n\sqrt{A}))f+(r_{2,n}(\mathbb{A}_h)\mathcal{P}_h-A^{-\frac{1}{2}}\sin(t_n\sqrt{A}))g,$$

则有误差估计

$$\|\mathcal{K}_{k,h}^{(n)}Y_0\|\leqslant C(k^{\frac{\beta-1}{4}}+h^{\frac{\beta-1}{2}})|||Y_0|||_\beta,\quad \beta\in[1,5], \tag{4.1.44}$$

$$|||\mathcal{F}_{k,h}^nY_0|||_1\leqslant C(k^{\frac{\beta-1}{4}}+h^{\frac{\beta-1}{4}})|||Y_0|||_\beta,\quad \beta\in[1,5]. \tag{4.1.45}$$

证明 只给出式(4.1.44)的证明, 式(4.1.45)的证明同理可得. 实际上$W_{h,1}^n-w_1(t_n)=\mathcal{K}_{k,h}^{(n)}Y_0$. 全离散问题(4.1.41)的变分公式为: 求$(W_{h,1}^n,W_{h,2}^n,W_{h,3}^n)\in S_h^1\times S_h^1\times S_h^1$, 使得

$$\begin{cases}(\overline{\partial}W_{h,2}^n,\vartheta_1)+(\nabla W_{h,3}^n,\nabla\vartheta_1)=0, & \vartheta_1\in\mathcal{S}_h^1,\\ (\nabla W_{h,1}^n,\nabla\vartheta_2)-(W_{h,3}^n,\vartheta_2)=0, & \vartheta_2\in\mathcal{S}_h^1,\\ (\nabla\overline{\partial}W_{h,1}^n,\nabla\vartheta_3)-(\nabla W_{h,2}^n,\nabla\vartheta_3)=0, & \vartheta_3\in\mathcal{S}_h^1.\end{cases} \tag{4.1.46}$$

类似于半离散误差估计式(4.1.35), 这里只需证明$\beta=1$和$\beta=5$两种情况. 在式(4.1.46)中令$\vartheta_1=\mathbb{A}_h^{-1}W_{h,2}^n$, $\vartheta_2=\mathbb{A}_h^{-1/2}W_{h,2}^n$和$\vartheta_3=\mathbb{A}_h^{-1/2}W_{h,1}^n$, 则有

$$(\nabla\overline{\partial}W_{h,1}^n,\nabla\mathbb{A}_h^{-1/2}W_{h,1}^n)+(\overline{\partial}W_{h,2}^n,\mathbb{A}_h^{-1}W_{h,2}^n)=0. \tag{4.1.47}$$

由上式可推得

$$\begin{aligned}\|W_{h,1}^n\|^2+\|\mathbb{A}_h^{-1/2}W_{h,2}^n\|^2 &\leqslant \|W_{h,1}^{n-1}\|^2+\|\mathbb{A}_h^{-1/2}W_{h,2}^{n-1}\|^2\leqslant\|\mathcal{P}_hf\|^2+\|\mathbb{A}_h^{-1/2}\mathcal{P}_hg\|^2\\ &\leqslant \|f\|_1^2+\|g\|_{-1}^2.\end{aligned}$$

下面证明$\beta=5$的情况. 引入记号

$$\begin{aligned}\theta_1^n&=W_{h,1}^n-\mathcal{R}_hw_1^n, & \rho_1^n&=w_1^n-\mathcal{R}_hw_1^n,\\ \theta_2^n&=W_{h,2}^n-\mathcal{P}_hw_2^n, & \rho_2^n&=w_2^n-\mathcal{P}_hw_2^n,\\ \theta_3^n&=W_{h,3}^n-\mathcal{R}_hw_3^n, & \rho_3^n&=w_3^n-\mathcal{R}_hw_3^n.\end{aligned}$$

将上述符号带入式(4.1.46)和式(4.1.38), 得

$$\begin{cases}(\overline{\partial}\theta_2^n,\vartheta_1)+(\nabla\theta_3^n,\nabla\vartheta_1)=(\overline{\partial}\rho_2^n,\vartheta_1)+(\nabla\rho_3^n,\nabla\vartheta_1)+(\partial_tw_2(t_n)-\overline{\partial}w_2^n,\vartheta_1), & \vartheta_1\in\mathcal{S}_h^1,\\ (\nabla\theta_1^n,\nabla\vartheta_2)-(\theta_3^n,\vartheta_2)=(\nabla\rho_1^n,\nabla\vartheta_2)-(\rho_3^n,\vartheta_2), & \vartheta_2\in\mathcal{S}_h^1,\\ (\nabla\overline{\partial}\theta_1^n,\nabla\vartheta_3)-(\nabla\theta_2^n,\nabla\vartheta_3)=(\nabla\overline{\partial}\rho_1^n,\nabla\vartheta_3)-(\nabla\rho_2^n,\nabla\vartheta_3)+ & \\ \qquad(\nabla(\partial_tw_1(t_n)-\overline{\partial}w_1^n),\nabla\vartheta_3), & \vartheta_3\in\mathcal{S}_h^1.\end{cases}$$

进一步根据投影算子$\mathcal{P}_h$和$\mathcal{R}_h$的性质, 得

$$\begin{cases} (\overline{\partial}\theta_2^n, \vartheta_1) + (\nabla\theta_3^n, \nabla\vartheta_1) = (\partial_t w_2(t_n) - \overline{\partial}w_2^n, \vartheta_1), & \vartheta_1 \in S_h^1, \\ (\nabla\theta_1^n, \nabla\vartheta_2) - (\theta_3^n, \vartheta_2) = -(\rho_3^n, \vartheta_2), & \vartheta_2 \in S_h^1, \\ (\nabla\overline{\partial}\theta_1^n, \nabla\vartheta_3) + (\nabla\theta_2^n, \nabla\vartheta_3) = -(\nabla\rho_2^n, \nabla\vartheta_3) + (\nabla(\partial_t w_1(t_n) - \overline{\partial}w_1^n), \nabla\vartheta_3), & \vartheta_3 \in S_h^1. \end{cases}$$

在上述三个式子中, 取$\vartheta_1 = \mathbb{A}_h^{-1}\theta_2^n, \vartheta_2 = \mathbb{A}_h^{-1/2}\theta_2^n$和$\vartheta_3 = \mathbb{A}_h^{-1/2}\theta_1^n$, 然后将三个式子相加可得

$$\begin{aligned} & \left(\overline{\partial}\theta_2^n, \mathbb{A}_h^{-1}\theta_2^n\right) + \left(\nabla\overline{\partial}\theta_1^n, \nabla\mathbb{A}_h^{-1/2}\theta_1^n\right) \\ = \;& -(\mathcal{R}_h\rho_2^n, \theta_1^n) + \left(\mathbb{A}_h^{-1/2}\mathcal{P}_h(\partial_t w_2(t_n) - \overline{\partial}w_2^n), \mathbb{A}_h^{-1/2}\theta_2^n\right) - \\ & (\rho_3^n, \mathbb{A}_h^{-1/2}\theta_2^n) + \left(\mathcal{R}_h(\partial_t w_1(t_n) - \overline{\partial}w_1^n), \theta_1^n\right). \end{aligned}$$

将上式从1到n求和, 得到

$$\begin{aligned} \|\theta_1^n\|^2 + \|\mathbb{A}_h^{-1/2}\theta_2^n\|^2 \leqslant\;& \sum_{j=1}^n k\left(\left\|\mathbb{A}_h^{-1/2}\mathcal{P}_h(\partial_t w_2(t_n) - \overline{\partial}w_2^n)\right\|^2 + \left\|\mathcal{R}_h(\partial_t w_1(t_n) - \overline{\partial}w_1^n)\right\|^2 + \right. \\ & \left. \|\rho_3^n\|^2 + \|\mathcal{R}_h\rho_2^n\|^2\right) + \sum_{j=1}^n k(\|\theta_1^j\|^2 + \|\mathbb{A}_h^{-1/2}\theta_2^j\|^2) \\ =\;& I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + \sum_{j=1}^n k(\|\theta_1^j\|^2 + \|\mathbb{A}_h^{-1/2}\theta_2^j\|^2). \end{aligned} \tag{4.1.48}$$

下面对上式右端四项分别进行估计. 首先注意到

$$\|\mathbb{A}_h^{-1/2}\mathcal{P}_h v\| \leqslant \|\mathbb{A}_h^{-1/4}\mathcal{P}_h v\| \leqslant \|v\|_{-1},\ \forall v \in H^{-1},$$

和分部积分

$$\partial_t w_i(t_n) - \frac{w_i^n - w_i^{n-1}}{k} = \frac{1}{k}\int_{t_{n-1}}^{t_n} (s - t_{n-1})\partial_{tt} w_i(s)\mathrm{d}s,\ i = 1, 2. \tag{4.1.49}$$

对I_1, 由分部积分式(4.1.49)和引理4.1.1, 得

$$\begin{aligned} I_1 \;=\;& \sum_{j=1}^n k\left\|\mathbb{A}_h^{-1/2}\mathcal{P}_h\left(\frac{1}{k}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(s - t_{j-1})\partial_{tt}w_2(s)\mathrm{d}s\right)\right\|^2 \\ \leqslant\;& \sum_{j=1}^n k\left(\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left\|\mathbb{A}_h^{-1/4}\mathcal{P}_h\partial_{tt}w_2(s)\right\|\mathrm{d}s\right)^2 \\ \leqslant\;& \sum_{j=1}^n k\left(\int_{t_{j-1}}^{t_j}\|\partial_{tt}w_2(t)\|_{-1}\mathrm{d}s\right)^2 \leqslant Ck^2(\|f\|_5^2 + \|g\|_3^2). \end{aligned} \tag{4.1.50}$$

下面估计第二项I_2. 首先根据算子$\mathcal{R}_h$和$\mathcal{P}_h$的定义, 它们满足性质

$$\mathcal{R}_h = \mathcal{P}_h(-I + \mathcal{R}_h) + \mathcal{P}_h, \quad \|\mathcal{P}_h\| \leqslant 1.$$

对于I_2, 根据分部积分式(4.1.49), 有下面估计

$$
\begin{aligned}
I_2 \;&=\; \sum_{j=1}^{n}\frac{2}{k}\Bigg(\Bigg\|\mathcal{P}_h(I-\mathcal{R}_h)\int_{t_{j-1}}^{t_j}(\partial_t w_1(t_j)-\partial_t w_1(s))\mathrm{d}s\Bigg\|^2+\\
&\quad\Bigg\|\mathcal{P}_h\Bigg(\int_{t_{j-1}}^{t_j}(s-t_{j-1})\partial_{tt}w_1(s)\mathrm{d}s\Bigg)\Bigg\|^2\Bigg)\\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n}\frac{2}{k}\left(\left(\int_{t_{j-1}}^{t_j}\|(I-\mathcal{R}_h)(\partial_t w_1(t_j)-\partial_t w_1(s))\|\,\mathrm{d}s\right)^2+k^2\left(\int_{t_{j-1}}^{t_j}\|\partial_{tt}w_1(s)\|\,\mathrm{d}s\right)^2\right)\\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n}\frac{2}{k}\left(h^4\left(\int_{t_{j-1}}^{t_j}\|\partial_t w_1(t_n)-\partial_t w_1(s)\|_2\,\mathrm{d}s\right)^2+k^2\left(\int_{t_{j-1}}^{t_j}\|\partial_{tt}w_1(s)\|\,\mathrm{d}s\right)^2\right)\\
&\leqslant C(h^2+k)^2(\|f\|_4^2+\|g\|_2^2).
\end{aligned}
$$

应用类似于I_2的估计方法, 可以得到I_3和I_4的估计如下

$$I_3+I_4\leqslant Ch^4(\|f\|_5+\|g\|_3)^2. \tag{4.1.51}$$

将上述I_i $(i=1,2,3,4)$的估计带入方程(4.1.48), 可得

$$\|\theta_1^n\|^2+\|\mathbb{A}_h^{-\frac{1}{2}}\theta_2^n\|^2\leqslant C(h^4+k^2)(\|f\|_5+\|g\|_3)^2+Ck\sum_{j=1}^{n}(\|\theta_1^j\|^2+\|\mathbb{A}_h^{-\frac{1}{2}}\theta_2^j\|^2).$$

最后由三角不等式和离散的Gronwall引理1.2.3即可得到$\beta=5$时估计式(4.1.44). 证毕. ¶

4.2 带有Q-Wiener过程噪声项的随机弹性方程有限元方法

4.2.1 随机弹性方程解的性质

本节介绍随机弹性方程解的性质. 首先给出算子$A=\Delta^2$, 初值(u_0,v_0)和Q-Wiener过程$W(t)$的假设条件, 然后进一步给出随机弹性方程弱解的存在性、唯一性和正则性.

首先假设以下条件满足.

假设 4.2.1 (线性算子A.) 设$A:D(A)\subset L^2\to L^2$是个稠定的、线性的、自伴正定的算子, 存在一列递增正的特征值序列$\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$和与之相对应的特征函数序列$\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$, $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$构成空间$L^2(\mathcal{D})$的一组标准完备正交基, 即对任意的$1\leqslant j<+\infty$,

$$A\phi_j=\lambda_j\phi_j,\quad \phi_j(x)|_{x\in\partial\mathcal{D}}=\Delta\phi_j(x)|_{x\in\partial\mathcal{D}}=0.$$

假设 4.2.2 (Q-Wiener过程.) 设Q是空间L^2中一个自伴的、半正定的算子, 并且存在一列递减正的特征值序列$\{\gamma_j\}_{j=1}^{\infty}$和与之相对应的特征函数序列$\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$, $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$构成$L^2(\mathcal{D})$的一组标准完备正交基, 并且下式成立

$$\sum_{j=1}^{\infty}\|A^{\frac{\gamma-1}{2}}Q^{\frac{1}{2}}e_j\|^2=\sum_{j=1}^{\infty}\|A^{\frac{\gamma-1}{2}}\gamma_j^{\frac{1}{2}}e_j\|^2<\infty,\quad \gamma\in[0,3].$$

设$\{W(t)\}_{t\geqslant 0}$是一个关于σ-域流$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$适应的$Q$-Wiener过程, 则存在一组相互独立的, 关于$\mathcal{F}_t$适应的实值Brownian运动$\{\beta_j(t)\}_{j=1}^{\infty}$, 使得

$$W(t)=\sum_{j=1}^{\infty}\gamma_j^{\frac{1}{2}}\beta_j(t)e_j. \tag{4.2.1}$$

假设 4.2.3 (初值(u_0,v_0).) (u_0,v_0)是值域属于空间$D(A^{\frac{\gamma}{2}})\times D(A^{\frac{\gamma-1}{2}})$的随机变量并且满足条件

$$E(\|A^{\frac{\gamma}{2}}u_0\|^2+\|A^{\frac{\gamma-1}{2}}v_0\|^2)<\infty,$$

其中$\gamma\geqslant 0$是假设4.2.2中的参数.

在本节中, 研究的随机弹性方程为:

$$\begin{cases} \mathrm{d}\dot{u}+\Delta^2u\mathrm{d}t=\mathrm{d}W, & (t,x)\in(0,T)\times\mathcal{D}, \\ u=\Delta u=0, & (t,x)\in(0,T)\times\partial\mathcal{D}, \\ u(0,x)=u_0,\ \dot{u}(0,x)=v_0, & x\in\mathcal{D}, \end{cases} \tag{4.2.2}$$

其中$\{W(t)\}$是定义在概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P,\{\mathcal{F}\}_t)$上的$Q$-Wiener过程, u_0, v_0是$\mathcal{F}_0$可测的随机变量.

设$v=\dot{u}$, $X:=(u,v)^{\mathrm{T}}$, $X_0:=(u_0,v_0)^{\mathrm{T}}$, 类似于方程(4.1.1), 随机弹性方程(4.2.2)可转化为Hilbert空间$\mathcal{H}$上的抽象发展方程

$$\begin{cases} \mathrm{d}X=\mathcal{A}X\mathrm{d}t+B\mathrm{d}W, & t\in(0,T), \\ X(0)=X_0, \end{cases} \tag{4.2.3}$$

其中$B=[0,I]^{\mathrm{T}}$, 算子$\mathcal{A}$和空间$\mathcal{H}$的定义见式(4.1.5).

设$X(t),t\in[0,T]$是一个$\mathcal{H}$值可料过程, 如果$X(\cdot)$的样本轨道是几乎处处Bochner可积的并且对任意的$\zeta\in D(\mathcal{A}^*)$和$t\in[0,T]$, 几乎处处成立

$$\langle X(t),\zeta\rangle=\langle X_0,\zeta\rangle+\int_0^t\langle X(s),\mathcal{A}^*\zeta\rangle\mathrm{d}s+\langle BW(t),\zeta\rangle, \tag{4.2.4}$$

则称X是问题(4.2.3)的弱解.

在假设4.2.1 ~假设4.2.3成立的情况下, 方程(4.2.2)存在唯一的弱解

$$X(t)=\mathcal{S}(t)X_0+\int_0^t\mathcal{S}(t-s)B\mathrm{d}W(s). \tag{4.2.5}$$

这只需验证式(4.2.5)定义的$X(t)$满足弱解定义式(4.2.4)即可.

为了进行误差估计, 需要给出方程(4.2.2)的弱解式(4.2.5)的正则性.

引理 4.2.1 如果假设4.2.1 ~假设4.2.3成立, 则方程(4.2.2)存在唯一的弱解由式(4.2.5)给出. 进一步, 对$t \geqslant 0$, 弱解有下面估计

$$|||X(t)|||_{L_2(\Omega;\mathcal{H}^{2\gamma})} \leqslant C\left(|||X_0|||_{L_2(\Omega;\mathcal{H}^{2\gamma})} + t^{\frac{1}{2}}\left\|A^{\frac{\gamma-1}{2}}Q^{\frac{1}{2}}\right\|_{\mathrm{HS}}\right), \tag{4.2.6}$$

其中$\mathcal{S}(t)$为$\mathcal{A}$生成的强连续半群.

证明 由式(4.2.5)和Itô等距式(1.5.40), 有

$$\begin{aligned}
|||X(t)|||^2_{L_2(\Omega;\mathcal{H}^{2\gamma})} &\leqslant 2\left(|||\mathcal{S}(t)X_0|||^2_{L_2(\Omega;\mathcal{H}^{2\gamma})} + \left|\left|\left|\int_0^t A^{\frac{\gamma}{2}}\mathcal{S}(t-s)B\mathrm{d}W(s)\right|\right|\right|^2_{L_2(\Omega;\mathcal{H}^{2\gamma})}\right)\\
&\leqslant 2\left(|||X_0|||^2_{L_2(\Omega;\mathcal{H}^{2\gamma})} + \int_0^t \left|\left|\left|A^{\frac{\gamma}{2}}\mathcal{S}(t-s)B\right|\right|\right|^2_{L_2^0}\mathrm{d}s\right).
\end{aligned}$$

由于$\cos(\sqrt{A}t)$和$\sin(\sqrt{A}t)$与A可交换, 进一步又有$\cos(\sqrt{A}t)$和$\sin(\sqrt{A}t)$是空间L^2 中两个有界的算子. 因为$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$是L^2中一组标准完备正交基, 根据范数$|||\cdot|||$的定义, 对于$\gamma \geqslant 0$有,

$$\begin{aligned}
&\int_0^t |||A^{\frac{2\gamma}{4}}\mathcal{S}(s)B|||_{L_2^0}\mathrm{d}s = \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty}\left|\left|\left|A^{\frac{\gamma}{2}}\mathcal{S}(s)\mathcal{B}Q^{\frac{1}{2}}e_k\right|\right|\right|^2\mathrm{d}s\\
=\ &\int_0^t \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left\|A^{\frac{\gamma-1}{2}}\sin(\sqrt{A}s)Q^{\frac{1}{2}}e_k\right\|^2 + \left\|A^{\frac{\gamma}{2}}\cos(\sqrt{A}s)Q^{\frac{1}{2}}e_k\right\|^2_{-2}\right\}\mathrm{d}s\\
=\ &\int_0^t \left\{\left\|A^{\frac{\gamma-1}{2}}\sin(\sqrt{A}s)Q^{\frac{1}{2}}\right\|^2_{\mathrm{HS}} + \left\|A^{\frac{\gamma-1}{2}}\cos(\sqrt{A}s)Q^{\frac{1}{2}}\right\|^2_{\mathrm{HS}}\right\}\mathrm{d}s\\
\leqslant\ & 2t\left\|A^{\frac{\gamma-1}{2}}Q^{\frac{1}{2}}\right\|^2_{\mathrm{HS}}.
\end{aligned}$$

引理证毕. ¶

4.2.2 基于C^1元的随机弹性方程半离散有限元方法强误差估计

本小节研究随机弹性方程(4.2.2)基于C^1元上的半离散有限元方法, 半离散有限元格式为: 求$X_h(t) = [u_h(t), v_h(t)]^T \in S_h^2 \times S_h^2$, 使得

$$\mathrm{d}X_h(t) = \mathcal{A}_h X_h(t)\mathrm{d}t + P_h B\mathrm{d}W(t),\ t > 0;\ X_h(0) = P_h X_0. \tag{4.2.7}$$

在4.1.2节中, 算子$\mathcal{A}_h$生成强连续的算子半群$S_h(t) = \mathrm{e}^{t\mathcal{A}_h}$, 其形式为式(4.1.16). 则方程(4.2.7)解的半群表达形式为

$$X_h(t) = S_h(t)X_{h,0} + \int_0^t S_h(t-s)P_h B\mathrm{d}W(s),\ t > 0. \tag{4.2.8}$$

设算子$P_1 : \mathcal{H} \to \dot{H}^0$定义为$P_1 Z = z_1, \forall Z = [z_1, z_2] \in \mathcal{H}$. 应用定理4.1.1的结论可得到随机弹性方程(4.2.2)的半离散有限元格式(4.2.7)的误差估计如下.

定理 4.2.1 令$X_0=[u_0,v_0]^{\mathrm{T}}$, $X_{h,0}=[P_hu_0,P_hv_0]^{\mathrm{T}}$. 设$X=[u,v]^{\mathrm{T}}$和$X_h=[u_h,v_h]^{\mathrm{T}}$分别是随机弹性方程(4.2.2)和半离散有限元问题(4.2.7)的解, 在假设4.2.1 ∼假设4.2.3成立的条件下有

$$\|u_h(t)-u(t)\|_{L_2(\Omega;\dot{H}^0)}\leqslant C_th^{\frac{4\gamma}{3}}(\|\|X_0\|\|_{L_2(\Omega;\mathcal{H}^{2\gamma})}+\|A^{\frac{\gamma-1}{2}}Q^{\frac{1}{2}}\|_{\mathrm{HS}}).\tag{4.2.9}$$

证明 首先, 随机弹性方程和半离散问题的解分别为

$$X=S(t)X_0+\int_0^t S(t-s)B\mathrm{d}W(s),$$

$$X_h=S_h(t)P_hX_0+\int_0^t S_h(t-s)P_hB\mathrm{d}W(s).$$

因此有

$$e(t)=X_h-X=(\mathcal{S}_hP_h-\mathcal{S}(t))X_0+\int_0^t(\mathcal{S}_h(t-s)P_h-\mathcal{S}(t-s))B\mathrm{d}W(s).$$

根据定理4.1.1中算子$\mathcal{K}_h(t)$的定义可得

$$e_1(t)=u_{h,1}(t)-u_1(t)=\mathrm{P}_1e(t)=\mathcal{K}_h(t)X_0+\int_0^t\mathcal{K}_h(t-s)B\mathrm{d}W(s)=I+II.\tag{4.2.10}$$

因此

$$\|e_1\|_{L_2(\Omega;\dot{H}^0)}\leqslant\|I\|_{L_2(\Omega;\dot{H}^0)}+\|II\|_{L_2(\Omega;\dot{H}^0)}.$$

由定理4.1.1得

$$\|I\|^2_{L_2(\Omega;\dot{H}^0)}=E(\|\mathcal{K}_h(t)X_0\|^2)\leqslant C_th^{\frac{16}{9}\gamma^2}E(\|\|X_0\|\|^2_{2\gamma}).$$

因为$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$是空间$\dot{H}^0$的一组正交基函数, 根据范数$\|\|\cdot\|\|_{\mathrm{HS}}$的定义可得

$$\begin{aligned}\|II\|^2_{L_2(\Omega;\dot{H}^0)}&=\left\|\int_0^t\mathcal{K}_h(t-s)B\mathrm{d}W\right\|^2_{L_2(\Omega;\dot{H}^0)}=\int_0^t\|\mathcal{K}_h(t-s)BQ^{\frac{1}{2}}\|^2_{\mathrm{HS}}\mathrm{d}s\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t\|\mathcal{K}_h(t-s)BQ^{\frac{1}{2}}e_k\|^2\mathrm{d}s.\end{aligned}\tag{4.2.11}$$

最后由定理4.1.1得

$$\begin{aligned}\|II\|^2_{L_2(\Omega;\dot{H}^0)}&\leqslant C_th^{\frac{16}{9}\gamma^2}\sum_{k=1}^{\infty}\|\|BQ^{\frac{1}{2}}e_k\|\|^2_{2\gamma}\\&=C_th^{\frac{16}{9}\gamma^2}\sum_{k=1}^{\infty}\|Q^{\frac{1}{2}}e_k\|^2_{2\gamma-2}=C_th^{\frac{16}{9}\gamma^2}\|A^{\frac{\gamma-1}{2}}Q^{\frac{1}{2}}\|^2_{\mathrm{HS}}.\end{aligned}$$

定理证毕. ¶

注 4.2.1 在这里以线性随机弹性方程为例介绍了随机弹性方程的有限元方法，而对于非线性随机弹性方程，在非线性项满足Lipschitz条件下处理方法与线性问题并没有很大的区别，主要的区别在于非线性项的处理，下面给出处理非线性项的基本思路.

考虑下列非线性随机弹性方程

$$\begin{cases} \mathrm{d}\dot{u} + \Delta^2 u \mathrm{d}t = F(u)\mathrm{d}t + G(u)\mathrm{d}W, & (t,x) \in (0,T) \times \mathcal{D}, \\ u = \Delta u = 0, & (t,x) \in (0,T) \times \partial\mathcal{D}, \\ u(0,x) = u_0,\ \dot{u}(0,x) = v_0, & t = 0, x \in \mathcal{D}, \end{cases} \tag{4.2.12}$$

其中函数$F(\cdot)$和$G(\cdot)$满足下面全局Lipschitz条件

(1) $\|F(u) - F(v)\| \leqslant C\|u - v\|, \forall u, v \in L^2$,

(2) $\|G(u) - G(v)\|_{\mathrm{HS}} \leqslant C\|u - v\|, \forall u, v \in L^2$.

由文献[3]可知，在条件(1)和(2)满足的情况下，方程(4.2.12)的解满足

$$\sup_{0\leqslant s\leqslant t} E\|u(s)\|^2 \leqslant C.$$

方程(4.2.12)的有限元方法的处理过程如下: 设u和u_h是方程(4.2.12)和其半离散有限元问题的解，则误差$u - u_h$可表示为

$$\begin{aligned} u - u_h \ &= \ P_1(S(t) - S_h P_h)X_0 + \\ &\int_0^t P_1(S(t-s) - S_h(t-s)P_h)BF(u(s))\mathrm{d}s + \\ &\int_0^t P_1 S_h(t-s)P_h B(F(u(s)) - F(u_h(s)))\mathrm{d}s + \\ &\int_0^t P_1(S(t-s) - S_h(t-s)P_h)BG(u(s))\mathrm{d}W(s) + \\ &\int_0^t P_1 S_h(t-s)P_h B(G(u(s)) - G(u_h(s)))\mathrm{d}W(s) \\ = \ &\sum I_i, i = 1,2,3,4,5. \end{aligned} \tag{4.2.13}$$

I_1可以由线性弹性方程有限元误差估计直接得到. 而对于I_3和I_5，由函数的Lipschitz条件得

$$\|I_i\|^2_{L^2(\Omega,\dot{H}^0)} \leqslant C\int_0^t \|u - u_h\|^2_{L^2(\Omega,\dot{H}^0)} ds,\ i = 3,5. \tag{4.2.14}$$

对于I_2的估计有

$$\begin{aligned} \|I_2\|_{L^2(\Omega,\dot{H}^0)} \ &\leqslant \ \int_0^t \|P_1(S(t-s) - S_h(t-s)P_h)BF(u(s))\|_{L^2(\Omega,\dot{H}^0)}\mathrm{d}s \\ &= \ \int_0^t \|P_1(S(t-s) - S_h(t-s)P_h)BF(u(s))\|_{L^2(\Omega,\dot{H}^0)}\mathrm{d}s \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^t \|\mathcal{K}_h(t-s)BF(u(s))\|_{L^2(\Omega,\dot{H}^0)}\mathrm{d}s \\
&\leqslant Ch^{\frac{4}{3}}\|F(u(s)\|_{L^2(\Omega,\dot{H}^0)} \leqslant Ch^{\frac{4}{3}}.
\end{aligned} \tag{4.2.15}
$$

同理可得到

$$
\|I_4\|_{L^2(\Omega,\dot{H}^0)} \leqslant Ch^{\frac{4}{3}}.
$$

最后由Gronwall引理1.2.3, 就可以得到非线性随机弹性方程有限元误差估计如下

$$
\|u-u_h\|_{L^2(\Omega,\dot{H}^0)} \leqslant Ch^{\frac{4}{3}}.
$$

随机双曲方程误差估计不需要算子在时间积分下的估计, 而随机抛物方程有限元误差估计需要算子在时间积分下的估计(详见参考文献[27]). 对于非线性随机弹性方程全离散有限元误差估计与半离散处理过程相似, 后面不再一一说明.

4.2.3 基于C^1元的随机弹性方程全离散有限元方法强误差估计

本小节在4.2.2节半离散格式的基础上对时间变量进行离散, 构造基于C^1元的随机弹性方程全离散有限元方法并研究其强误差估计.

设k为时间步长, 时间节点为$t_n = nk$, $n \geqslant 1$, $\Delta W^n = W(t_n) - W(t_{n-1})$. 则随机弹性方程的全离散有限元格式为: 求$U_1^n, U_2^n \in S_h^2$, 使得

$$
\begin{cases}
\begin{pmatrix} U_1^n \\ U_2^n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} U_1^{n-1} \\ U_2^{n-1} \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 0 & I \\ -\Lambda_h & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1^n \\ U_2^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ P_h\Delta W^n \end{pmatrix}, \\
U_1^0 = P_h u_0, \qquad U_2^0 = P_h v_0.
\end{cases} \tag{4.2.16}
$$

此方程可以化为: 求$U = [U_1^n, U_2^n]^{\mathrm{T}}$使得

$$
\begin{cases}
U^n - U^{n-1} = k\mathcal{A}_h U^n + \int_{t_{n-1}}^{t_n} P_h B\mathrm{d}W, \\
U^0 = (P_h u_0, P_h v_0)^{\mathrm{T}}.
\end{cases}
$$

设$r(\lambda) = 1/(1-\lambda)$, 则方程(4.2.16)的解可以用算子形式表示为

$$
U^n = \mathcal{S}_{k,h}^n P_h X_0 + \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \mathcal{S}_{k,h}^{n-j+1} P_h B\mathrm{d}W, \tag{4.2.17}
$$

其中$\mathcal{S}_{k,h} = r(k\mathcal{A}_h)$.

下面给出随机弹性方程全离散有限元方法式(4.2.16)的误差估计.

定理 4.2.2 设$U^n = (U_1^n, U_2^n)^{\mathrm{T}}$, $X(t_n) = (u(t_n), v(t_n))^{\mathrm{T}}$分别是问题(4.2.16)和式(4.2.2)的解. 在假设4.2.1 ~假设4.2.3成立的情况下, 存在一个正常数C, 使得

$$
\|u(t_n) - U_1^n\|_{L_2(\Omega;\dot{H}^0)} \leqslant C(k^{\frac{\gamma}{3}} + h^{\frac{4\gamma}{3}})(|||X_0|||_{L_2(\Omega;\mathcal{H}^{2\gamma})} + \|A^{\frac{\gamma-1}{2}}Q^{\frac{1}{2}}\|_{\mathrm{HS}}). \tag{4.2.18}
$$

证明 这里对误差$\|u(t_n)-U_1^n\|_{L_2(\Omega;\dot{H}^0)}$进行估计. 设$e_1^n:=U_1^n-u(t_n)$, 则有

$$\begin{aligned} e_1^n &= \mathcal{K}_{k,h}^{(n)}X_0+\sum_{j=1}^n\int_{t_{j-1}}^{t_j}\mathcal{K}_{k,h}^{(n-j+1)}B\mathrm{d}W(s)+ \\ & \sum_{j=1}^n\int_{t_{j-1}}^{t_j}\frac{1}{\sqrt{A}}\Big(\sin(\sqrt{A}(t_n-t_{j-1}))-\sin(\sqrt{A}(t_n-s))\Big)\mathrm{d}W(s)=I+II+III. \end{aligned}$$

因此

$$\|e_1^n\|_{L_2(\Omega;\dot{H}^0)}\leqslant\|I\|_{L_2(\Omega;\dot{H}^0)}+\|II\|_{L_2(\Omega;\dot{H}^0)}+\|III\|_{L_2(\Omega;\dot{H}^0)}.$$

首先注意到, 由式(4.1.27)可知, 对于$\forall\gamma\in[0,3]$, $\mathcal{K}_{k,h}^{(n)}$是空间$\mathcal{L}(\mathcal{H}^{2\gamma},\dot{H}^0)$上的有界线性算子. 对于$I$, 根据定理4.1.2和假设4.2.3, 可以得到估计

$$\|I\|_{L_2(\Omega;\dot{H}^0)}\leqslant\|\mathcal{K}_{k,h}^{(n)}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}^{2\gamma},\dot{H}^0)}|||X_0|||_{L_2(\Omega;\mathcal{H}^{2\gamma})}\leqslant C(h^{\frac{4\gamma}{3}}+k^{\frac{\gamma}{3}})|||X_0|||_{L_2(\Omega;\mathcal{H}^{2\gamma})}.$$

在定理4.1.2中取$Y_0=BQ^{\frac12}e_l$, 然后再根据Itô等距式(1.5.40), 可以得到第二项的估计

$$\begin{aligned} &\|II\|^2_{L_2(\Omega;\dot{H}^0)}=\left\|\sum_{j=1}^n\int_{t_{j-1}}^{t_j}\mathcal{K}_{k,h}^{(n-j+1)}B\mathrm{d}W\right\|^2_{L_2(\Omega;H)} \\ =&\ \sum_{j=1}^n\int_{t_{j-1}}^{t_j}\|\mathcal{K}_{k,h}^{(n-j+1)}BQ^{\frac12}\|^2_{\mathrm{HS}}\mathrm{d}s=\sum_{l=1}^\infty\sum_{j=1}^n\int_{t_{j-1}}^{t_j}\|\mathcal{K}_{k,h}^{(n-j+1)}BQ^{\frac12}e_l\|^2\mathrm{d}s \\ \leqslant&\ C\sum_{l=1}^\infty\sum_{j=1}^n\int_{t_{j-1}}^{t_j}\|\mathcal{K}_{k,h}^{(n-j+1)}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}^{2\gamma},\dot{H}^0)}|||BQ^{\frac12}e_l|||^2_{2\gamma}\mathrm{d}s \\ \leqslant&\ C(h^{\frac{8\gamma}{3}}+k^{\frac{2\gamma}{3}})\sum_{l=1}^\infty\|Q^{\frac12}e_l\|^2_{2\gamma-2} \\ \leqslant&\ C(h^{\frac{8\gamma}{3}}+k^{\frac{2\gamma}{3}})\|A^{\frac{\gamma-1}{2}}Q^{\frac12}\|^2_{\mathrm{HS}}. \end{aligned}$$

在引理4.1.2中取$0\leqslant\mu=\frac{3-\gamma}{6}\leqslant\frac12$, $\gamma\in[0,3]$, 然后再根据Itô等距式(1.5.40)得到下一项的估计

$$\begin{aligned} &\|III\|^2_{L_2(\Omega;\dot{H}^0)} \\ =&\ \left\|\sum_{j=1}^n\int_{t_{j-1}}^{t_j}\frac{1}{\sqrt{A}}\Big(\sin(\sqrt{A}(t_n-t_{j-1}))-\sin(\sqrt{A}(t_n-s)\Big)\mathrm{d}W(s)\right\|^2_{L_2(\Omega;H)} \\ \leqslant&\ \left|\left|\left|\sum_{j=1}^n\int_{t_{j-1}}^{t_j}\Big(\mathcal{S}(t_n-t_{j-1})-\mathcal{S}(t_n-s)\Big)B\mathrm{d}W(s)\right|\right|\right|^2_{L_2(\Omega;\mathcal{H}^0)} \\ =&\ \sum_{j=1}^n\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left|\left|\left|\Big(\mathcal{S}(t_n-t_{j-1})-\mathcal{S}(t_n-s)\Big)BQ^{\frac12}\right|\right|\right|^2_{\mathrm{HS}}\mathrm{d}s \\ =&\ \sum_{j=1}^n\sum_{l=1}^\infty\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left|\left|\left|\Big(A^{\frac{3-\gamma}{6}}\Big(\mathcal{S}(t_n-t_{j-1})-\mathcal{S}(t_n-s)\Big)BA^{\frac{\gamma-3}{6}}Q^{\frac12}e_l\right|\right|\right|^2\mathrm{d}s \\ \leqslant&\ C\sum_{j=1}^n\int_{t_{j-1}}^{t_j}(s-t_{j-1})^{\frac{2\gamma}{3}}\mathrm{d}s\sum_{l=1}^\infty|||BA^{-\frac{\gamma}{3}}A^{\frac{\gamma-1}{2}}Q^{\frac12}e_l|||^2_2 \end{aligned}$$

$$\leqslant \quad Ck^{\frac{2\gamma}{3}}\|A^{\frac{\gamma-1}{2}}Q^{\frac{1}{2}}\|_{\mathrm{HS}}^2.$$

综上所述可以证明式(4.2.18). 定理证毕. ¶

因为Q-Wiener过程是一个无穷级数$W(t)=\sum\limits_{j=1}^{\infty}\gamma_j^{\frac{1}{2}}\beta_j(t)e_j$, 在实际的数值计算中, 只能用有限项来近似$W$. 设$J$是截断噪声项的项数, 其截断噪声项形式为

$$W_J=\sum_{j=1}^{J}\gamma_j^{\frac{1}{2}}\beta_j(t)e_j.$$

在方程(4.2.17)中, 用W_J代替W, 得到问题的解记为U_J^n, 则

$$U_J^n=\mathcal{S}_{k,h}^nP_hX_0+\sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\mathcal{S}_{k,h}^{n-i+1}P_hB\mathrm{d}W_J. \tag{4.2.19}$$

下面在定理4.2.2的基础上给出有限元全离散格式(4.2.19)的误差估计.

定理 4.2.3 假设A和Q拥有相同特征函数列. 设$u(t)$和U_{1J}^n分别是方程(4.2.2)和式(4.2.19)的解, 则在定理4.2.2成立的情况下, 有下面误差估计

$$\begin{aligned}&\|u(t_n)-U_{1J}^n\|_{L_2(\Omega;\dot{H}^0)}\\ \leqslant\ & C(k^{\frac{\gamma}{3}}+h^{\frac{4\gamma}{3}})(|||X_0|||_{L_2(\Omega:\mathcal{H}^{2\gamma})}+\|A^{\frac{\gamma-1}{2}}Q^{\frac{1}{2}}\|_{\mathrm{HS}}+\sum_{j=J+1}^{\infty}\gamma_j\lambda_j^{-1})^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{4.2.20}$$

进一步, 如果

$$\lambda_{J+1}^{-1}\leqslant Ch^{\frac{8}{3}}\quad 或\quad Ck^{\frac{2}{3}}, \tag{4.2.21}$$

则

$$\|u(t_n)-U_{1J}^n\|_{L_2(\Omega;\dot{H}^0)}\leqslant C(k^{\frac{\gamma}{3}}+h^{\frac{4\gamma}{3}})(|||X_0|||_{L_2(\Omega:\mathcal{H}^{2\gamma})}+\|A^{\frac{\gamma-1}{2}}Q^{\frac{1}{2}}\|_{\mathrm{HS}}). \tag{4.2.22}$$

证明 根据三角不等式和定理4.2.2, 只需估计U_1^n和U_{1J}^n之间的误差. 根据方程(4.2.17)和式(4.2.19), 有

$$U_1^n-U_{1J}^n=\sum_{j=J+1}^{\infty}\gamma_j^{\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i}r_{2,n-i+1}(\Lambda_h)P_he_j\mathrm{d}\beta_j(s),$$

因此

$$\begin{aligned}\|U_{1J}^n-U_1^n\|_{L_2(\Omega,\dot{H}^0)}^2 &= \sum_{j=J+1}^{\infty}\gamma_j\sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\|r_{2,n-i+1}(\Lambda_h)P_he_j\|^2\mathrm{d}s\\ &\leqslant 2\sum_{j=J+1}^{\infty}\gamma_j\sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\|A^{-\frac{1}{2}}\sin(\sqrt{A}(t_n-t_{i-1}))e_j\|^2\mathrm{d}s+\\ &\quad 2\sum_{j=J+1}^{\infty}\gamma_j\sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\|\mathcal{K}_{k,h}^{(n-i+1)}Be_j\|^2\mathrm{d}s\end{aligned}$$

$$= \quad S_1 + S_2.$$

因为$\sin(\sqrt{A}t)$是有界的, 与A可以相互交换的算子, 因此有

$$\begin{aligned}
S_1 &= 2\sum_{j=J+1}^{\infty}\gamma_j\sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\|A^{-\frac{1}{2}}\sin(\sqrt{A}(t_n-t_i))e_j\|^2\mathrm{d}s \\
&\leqslant 2\sum_{j=J+1}^{\infty}\gamma_j\sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\|A^{-\frac{1}{2}}e_j\|^2\mathrm{d}s \leqslant C\sum_{j=J+1}^{\infty}\gamma_j\|A^{-\frac{1}{2}}e_j\|^2 \\
&\leqslant C\sum_{j=J+1}^{\infty}\gamma_j\lambda_j^{-1} = 2\lambda_{J+1}^{-\gamma}\sum_{j=J+1}^{\infty}\gamma_j(\frac{\lambda_{J+1}}{\lambda_j})^{\gamma}\lambda_j^{\gamma-1} \\
&\leqslant C(h^{\frac{8\gamma}{3}}+k^{\frac{2\gamma}{3}})\sum_{j=J+1}^{\infty}\gamma_j\lambda_j^{\gamma-1} = C(h^{\frac{8\gamma}{3}}+k^{\frac{2\gamma}{3}})\|A^{\frac{\gamma-1}{2}}Q^{\frac{1}{2}}\|_{\mathrm{HS}}^2.
\end{aligned}$$

对于S_2, 在定理4.1.2中取$f=0, g=e_j$, 即可得到估计

$$\begin{aligned}
S_2 &\leqslant Ch^{\frac{8\gamma}{3}}\sum_{j=J+1}^{\infty}\gamma_j\int_0^{t_n}\|e_j\|_{2\gamma-2}^2\mathrm{d}s \\
&= Ch^{\frac{8\gamma}{3}}\sum_{j=J+1}^{\infty}\gamma_j\|e_j\|_{2\gamma-2}^2 \leqslant C(h^{\frac{8\gamma}{3}}+k^{\frac{2\gamma}{3}})\|A^{\frac{\gamma-1}{2}}Q^{\frac{1}{2}}\|_{\mathrm{HS}}^2.
\end{aligned}$$

引理证毕. ¶

4.2.4 基于C^0元的随机弹性方程半离散有限元方法强误差估计

本小节研究随机弹性方程(4.2.2)基于C^0元上的半离散有限元方法. 基于C^0元的半离散有限元格式为: 求$X_h=[u_h,v_h]^{\mathrm{T}}\in S_h^1\times S_h^1$, 使得

$$\mathrm{d}X_h(t) = \mathcal{A}_hX_h(t)\mathrm{d}t = \mathcal{P}_hB\mathrm{d}W(t), \quad t>0,\ X_h(0)=\mathcal{P}_hX_0. \tag{4.2.23}$$

方程(4.2.23)解的半群表达形式为

$$X_h(t) = \mathcal{S}_h(t)\mathcal{P}_hX_0 + \int_0^t\mathcal{S}_h(t-s)\mathcal{P}_hB\mathrm{d}W(s). \tag{4.2.24}$$

随机弹性方程(4.2.2)基于C^0元上的半离散有限元格式(4.2.23)的误差估计如下.

定理 4.2.4 设$X(t)=[u(t),\dot{u}(t)]^{\mathrm{T}}$, $X_h(t)=[u_h(t),v_h(t)]^{\mathrm{T}}$分别为方程(4.2.2)和方程(4.2.23)的解. 如果$X_0\in L_2(\Omega;\mathcal{H}^{\gamma})$, $\|A^{\frac{\gamma-2}{4}}Q^{\frac{1}{2}}\|_{\mathrm{HS}}<\infty$, 则对$\gamma\in[1,5]$, 下列误差估计成立.

$$\|u(t)-u_h(t)\|_{L_2(\Omega;\dot{H}^0)} \leqslant Ch^{\frac{\gamma-1}{2}}(\||X_0\||_{L_2(\Omega;\mathcal{H}^{\gamma})}+\|A^{\frac{\gamma-2}{4}}Q^{\frac{1}{2}}\|_{\mathrm{HS}}), \tag{4.2.25}$$

$$\begin{aligned}
&\|u(t)-u_h(t)\|_{L_2(\Omega;\dot{H}^1)}+\|\dot{u}(t)-v_h(t)\|_{L_2(\Omega;\dot{H}^{-1})} \\
\leqslant\ & Ch^{\frac{\gamma-1}{4}}(\||X_0\||_{L_2(\Omega;\mathcal{H}^{\gamma})}+\|A^{\frac{\gamma-2}{4}}Q^{\frac{1}{2}}\|_{\mathrm{HS}}).
\end{aligned} \tag{4.2.26}$$

证明 这里给出式(4.2.26)的证明, 利用类似的方法, 可以得到式(4.2.25)的估计. 注意到$\mathcal{F}_h(t)=\mathcal{S}_h(t)\mathcal{P}_h-\mathcal{S}(t)$. 根据方程(4.2.5)和式(4.2.24), $X_h(t)-X(t)$可表示成

$$X_h(t)-X(t)=\mathcal{F}_h(t)X_0+\int_0^t \mathcal{F}_h(t-s)B\mathrm{d}W(s),\quad t\geqslant 0. \tag{4.2.27}$$

对上式取期望得

$$\begin{aligned}&|||X_h(t)-X(t)|||_{L_2(\Omega;\mathcal{H}^1)}\\ \lesssim\ &|||\mathcal{F}_h(t)X_0|||_{L_2(\Omega;\mathcal{H}^1)}+\left|\left|\left|\int_0^t \mathcal{F}_h(t-s)B\mathrm{d}W(s)\right|\right|\right|_{L_2(\Omega;\mathcal{H}^1)}.\end{aligned} \tag{4.2.28}$$

根据定理4.1.3, 可以得到第一项的估计如下

$$|||\mathcal{F}_h(t)X_0|||_{L_2(\Omega;\mathcal{H}^1)}\lesssim h^{\frac{\gamma-1}{4}}|||X_0|||_{L_2(\Omega;\mathcal{H}^\gamma)}. \tag{4.2.29}$$

根据范数$\|\cdot\|_{\mathrm{HS}}$的定义和定理4.1.3, 可以得到第二项的估计

$$\begin{aligned}&\left|\left|\left|\int_0^t \mathcal{F}_h(t-s)B\mathrm{d}W(s)\right|\right|\right|^2_{L_2(\Omega;\mathcal{H}^1)}=E\left(\left|\left|\left|\int_0^t \mathcal{F}_h(t-s)B\mathrm{d}W(s)\right|\right|\right|_1\right)^2\\ =\ &\int_0^t |||A^{\frac14}\mathcal{F}_h(t-s)BQ^{\frac12}|||^2_{\mathrm{HS}}\mathrm{d}s=\sum_{l=1}^\infty\int_0^t|||\mathcal{F}_h(t-s)BQ^{\frac12}e_l|||_1^2\mathrm{d}s\\ \leqslant\ &Ch^{\frac{\gamma-1}{2}}\sum_{l=1}^\infty|||BQ^{\frac12}e_l|||^2_\gamma\leqslant Ch^{\frac{\gamma-1}{2}}\sum_{l=1}^\infty\|Q^{\frac12}e_l\|^2_{\gamma-2}\leqslant Ch^{\frac{\gamma-1}{2}}\|A^{\frac{\gamma-2}{4}}Q^{\frac12}\|^2_{\mathrm{HS}}.\end{aligned} \tag{4.2.30}$$

定理证毕. ¶

4.2.5 基于C^0元的随机弹性方程全离散有限元方法强误差估计

本小节在4.2.4节半离散格式的基础上, 构造基于C^0元的随机弹性方程全离散有限元格式并研究其强误差估计.

设k是时间步长, 时间节点为$t_n=nk$, $n\geqslant 1$, $U^n=[U_1^n,U_2^n]^{\mathrm{T}}$和$\overline{\partial}U^n=\frac{U^n-U^{n-1}}{k}$, $i=1,2$. 在方程(4.2.23)中用向后差分代替时间导数, 可以得到全离散有限元格式

$$\overline{\partial}U^n=\mathcal{A}_hU^n+\frac{1}{k}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\mathcal{P}_hB\mathrm{d}W(s),n\geqslant 1,\ X_{h,0}=\mathcal{P}_hX_0. \tag{4.2.31}$$

设$S_{k,h}^n=1/(1+\mathcal{A}_h)^n$, 则方程(4.2.31)的解可以写成

$$U^n=\mathcal{S}_{k,h}^n\mathcal{P}_hX_0+\sum_{j=1}^n\int_{t_{j-1}}^{t_j}\mathcal{S}_{k,h}^{n-j}\mathcal{P}_hB\mathrm{d}W(s). \tag{4.2.32}$$

随机弹性方程(4.2.2)基于C^0元上的全离散有限元格式(4.2.31)有如下误差估计.

定理 4.2.5 设$X(t)=[u(t),\dot{u}(t)]^{\mathrm{T}}$, $U^n=[U_1^n,U_2^n]^{\mathrm{T}}$分别是方程(4.2.2)和方程(4.2.32)的解. 若$\|A^{\frac{\gamma-2}{4}}Q^{\frac12}\|_{\mathrm{HS}}$有界, $X_0\in L_2(\Omega;\mathcal{H}^\gamma)$, 则对$\gamma\in[1,5]$, 下列误差估计成立.

$$\|u(t_n)-U_1^n\|_{L_2(\Omega;\dot{H}^0)}\leqslant C(h^{\frac{\gamma-1}{2}}+k^{\frac{\gamma-1}{4}})(|||X_0|||_{L_2(\Omega;\mathcal{H}^\gamma)}+\|A^{\frac{\gamma-2}{4}}Q^{\frac12}\|_{\mathrm{HS}}), \tag{4.2.33}$$

$$\begin{aligned}
&\|u(t_n)-U_1^n\|_{L_2(\Omega;\dot H^1)}+\|\dot u(t_n)-U_2^n\|_{L_2(\Omega;\dot H^{-1})}\\
\leqslant\ & C(h^{\frac{\gamma-1}{4}}+k^{\frac{\gamma-1}{4}})(|||X_0|||_{L_2(\Omega;\mathcal{H}^\gamma)}+\|A^{\frac{\gamma-2}{4}}Q^{\frac12}\|_{\mathrm{HS}}).
\end{aligned}\tag{4.2.34}$$

证明 类似于定理4.2.4的情况，这里只证式(4.2.34). 注意到$\mathcal{F}_{k,h}^n=\mathcal{S}_{k,h}^n\mathcal{P}_h-\mathcal{S}(t_n)$. 设$e^n=U^n-X(t_n)$，则根据式(4.2.2)和式(4.2.32)，$e^n$可分解成为

$$\begin{aligned}
e_n\ =\ & \mathcal{F}_{k,h}^nX_0+\sum_{j=1}^n\int_{t_{j-1}}^{t_j}\mathcal{F}_{k,h}^{n-j+1}B\mathrm{d}W(s)+\\
&\sum_{j=1}^n\int_{t_{j-1}}^{t_j}\Big(\mathcal{S}(t_n-t_{j-1})-\mathcal{S}(t_n-s)\Big)B\mathrm{d}W(s)=I+II+III.
\end{aligned}\tag{4.2.35}$$

下面对上式右端各个部分分别进行估计. 由定理4.1.4，得到第一项估计

$$|||I|||_{L_2(\Omega;\mathcal{H}^1)}\leqslant C(k^{\frac{\gamma-1}{4}}+h^{\frac{\gamma-1}{4}})|||X_0|||_{L(\Omega;\mathcal{H}^\gamma)}.\tag{4.2.36}$$

在定理4.1.4中取$Y_0=[0,e_j]$, $j=1,2,\cdots$，根据Itô等距式(1.5.40)得到第二项的估计

$$\begin{aligned}
|||II|||_{L_2(\Omega;\mathcal{H}^1)}^2\ =\ & E\bigg(\bigg|\bigg|\bigg|\sum_{j=1}^n\int_{t_{j-1}}^{t_j}\mathcal{F}_{k,h}^{n-j+1}B\mathrm{d}W(s)\bigg|\bigg|\bigg|_1\bigg)\\
=\ & \bigg(\sum_{j=1}^n\int_{t_{j-1}}^{t_j}\bigg\|A^{\frac14}\mathcal{F}_{k,h}^{n-j+1}B\bigg\|_{\mathrm{HS}}^2\mathrm{d}s\bigg)\\
=\ & \sum_{l=1}^\infty\bigg(\sum_{j=1}^n\int_{t_{j-1}}^{t_j}\bigg|\bigg|\bigg|\mathcal{F}_{k,h}^{n-j+1}BQ^{\frac12}e_l\bigg|\bigg|\bigg|_1^2\mathrm{d}s\bigg)\\
\leqslant\ & C(h^{\frac{\gamma-1}{2}}+k^{\frac{\gamma-1}{2}})\bigg(\sum_{j=1}^nk\sum_{l=1}^\infty\bigg|\bigg|\bigg|BQ^{\frac12}e_l\bigg|\bigg|\bigg|_\gamma^2\bigg)\\
\leqslant\ & C(h^{\frac{\gamma-1}{2}}+k^{\frac{\gamma-1}{2}})\|A^{\frac{\gamma-2}{4}}Q^{\frac12}\|_{\mathrm{HS}}^2.
\end{aligned}\tag{4.2.37}$$

对于$1\leqslant\gamma\leqslant5$, $D(A^{\frac{1+\gamma}{8}})\subset D(A^{\frac14})$. 在引理4.1.2中取$\mu=\frac{5-\gamma}{8}$和$Y_0=A^{\frac{\gamma-2}{4}}BQ^{\frac12}e_l$，其中$l=1,2,\cdots$，可得到最后一项的估计如下

$$\begin{aligned}
|||III|||_{L_2(\Omega;\mathcal{H}^1)}^2\ =\ & E\bigg(\bigg|\bigg|\bigg|\sum_{j=1}^n\int_{t_{j-1}}^{t_j}\Big(\mathcal{S}(t_n-t_{j-1})-\mathcal{S}(t_n-s)\Big)B\mathrm{d}W(s)\bigg|\bigg|\bigg|_1\bigg)^2\\
=\ & \sum_{l=1}^\infty\sum_{j=1}^n\int_{t_{j-1}}^{t_j}\bigg|\bigg|\bigg|A^{\frac14}\Big(\mathcal{S}(t_n-t_{j-1})-\mathcal{S}(t_n-s)\Big)BQ^{\frac12}e_l\bigg|\bigg|\bigg|^2\mathrm{d}s\\
\leqslant\ & C\sum_{l=1}^\infty\sum_{j=1}^n\int_{t_{j-1}}^{t_j}\bigg|\bigg|\bigg|A^{\frac{1+\gamma}{8}}\Big(\mathcal{S}(t_n-t_{j-1})-\mathcal{S}(t_n-s)\Big)BQ^{\frac12}e_l\bigg|\bigg|\bigg|^2\mathrm{d}s\\
\leqslant\ & Ck^{\frac{\gamma-1}{2}}\sum_{l=1}^\infty\sum_{j=1}^n\int_{t_{j-1}}^{t_j}\bigg|\bigg|\bigg|A^{\frac{\gamma-2}{4}}BQ^{\frac12}e_l\bigg|\bigg|\bigg|_2^2\mathrm{d}s\\
\leqslant\ & Ck^{\frac{\gamma-1}{2}}\|A^{\frac{\gamma-2}{4}}Q^{\frac12}\|_{\mathrm{HS}}^2.
\end{aligned}\tag{4.2.38}$$

定理证毕. ¶

4.2.6 随机弹性方程有限元方法的弱误差估计

在许多情况下, 人们只是对Itô过程各阶矩的近似程度感兴趣, 而对于近似解的样本路径的近似程度没有过多要求, 于是就有了弱收敛的概念. 一个离散格式是以阶$\beta \in (0,\infty]$弱收敛的, 如果对于近似解Y, 精确解X和任意多项式函数g, 存在有限正常数K,δ_0使得

$$|E(g(X)-g(Y))| \leqslant K\delta^{\beta} \tag{4.2.39}$$

对任意的离散步长$\delta \in (0,\delta_0)$成立.

本小节给出随机弹性方程基于C^0和C^1元有限元方法的弱误差估计. 首先将半离散问题和全离散问题转化为统一的形式, 然后用这个统一的形式给出弱误差的一般表达形式.

为了分析方便, 将分片多项式C^0和C^1空间有关的投影算子, 离散算子等知识进行整合. 设离散有限元空间统称为$S_h^{\varrho(r)} \in H_0^1 \cap H^{\varrho(r)}$, $\varrho(r)=1,2$. A_h表示S_h^2上离散双调和算子Λ_h或者S_h^1上的离散Laplace算子的平方Δ_h^2, $\mathbb{P}_h$表示P_h或者$\mathcal{P}_h$, $\mathbb{R}_h$为R_h或者$\mathcal{R}_h$. 半离散问题(4.2.7)和问题(4.2.23)可以写成下列抽象的形式

$$\mathrm{d}X_h(t)=\mathcal{A}_hX_h(t)\mathrm{d}t+B_h\mathrm{d}W(t),\ X_h(0)=X_{h,0}, \tag{4.2.40}$$

其中$\mathcal{A}_h=\begin{pmatrix} 0 & I \\ -A_h & 0 \end{pmatrix}$. 这个方程解的表达形式为

$$X_h(t)=\mathcal{S}_h(t)X_{h,0}+\int_0^t \mathcal{S}_h(t-s)B_h\mathrm{d}W(s), \tag{4.2.41}$$

其中$B_h=\mathbb{P}_hB$, $\mathcal{S}_h(t)$是由$\mathcal{A}_h$生成的强连续算子半群. 类似地, 全离散问题(4.2.16)和问题(4.2.31)的抽象形式为

$$U^n-U^{n-1}=k\mathcal{A}_hU^n+\int_{t_{n-1}}^{t_n} B_h\mathrm{d}W(s). \tag{4.2.42}$$

设$r(\lambda)=1/(1-\lambda)$和$\mathcal{S}_{k,h}=r(k\mathcal{A}_h)$, 可以将式(4.2.42)写成下列形式

$$U^n=\mathcal{S}_{k,h}^n\mathbb{P}_hX_0+\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\mathcal{S}_{k,h}^{n-j+1}B_h\mathrm{d}W(t). \tag{4.2.43}$$

下面考虑U^n的连续的时间插值$\overline{U}_{h,t}$, 定义为空间$S_h^{\varrho(r)}\times S_h^{\varrho(r)}$值域上的、$\{\mathcal{F}_t\}$适应的随机变量,

$$\begin{aligned}\overline{U}_{h,t} &= \sum_{j=0}^{N}\mathcal{S}_{k,h}^{N-j}1_j(t_N-t)\mathbb{P}_hX_0+\int_0^t\sum_{j=0}^{N}\mathcal{S}_{k,h}^{N-j}1_j(t_N-t+s)B_h\mathrm{d}W(s)\\ &= \overline{\mathcal{S}}_{k,h}(t)\mathbb{P}_hX_0+\int_0^t\overline{\mathcal{S}}_{k,h}(t-s)B_h\mathrm{d}W(s),\end{aligned} \tag{4.2.44}$$

其中$\overline{\mathcal{S}}_{k,h}(t)=\sum_{j=0}^{N}\mathcal{S}_{k,h}^{N-j}1_j(t_N-t)$, 1_j为函数$1_{[t_j,t_{j+1})}$. 注意到当$t=t_n$时, $\overline{U}_{h,t_n}=U^n$. 则半离散问题(4.2.40)和全离散问题(4.2.44)可以写成统一的格式,

$$\widetilde{X}_h(t)=\widetilde{\mathcal{S}}_h(t)\mathbb{P}_hX_0+\int_0^t\widetilde{\mathcal{S}}_h(t-s)B_h\mathrm{d}W(s), \tag{4.2.45}$$

其中$\widetilde{\mathcal{S}}_h(t)=\mathcal{S}_h(t)$或者$\widetilde{\mathcal{S}}_h(t)=\overline{\mathcal{S}}_{k,h}(t)$.

引进辅助问题

$$\mathrm{d}Z(t)=\mathcal{S}(T-t)B\mathrm{d}W(t),\quad t\in(\tau,T],Z(\tau)=\xi, \tag{4.2.46}$$

其中ξ是一个$\mathcal{F}_\tau$-可测的变量. 这个方程有唯一的解

$$Z(t,\tau,\xi)=\xi+\int_\tau^t\mathcal{S}(T-s)B\mathrm{d}W(s),t\in[\tau,T].$$

设$\xi=[\xi_1,\xi_2]^{\mathrm{T}}$, P_1是$\mathcal{H}\to\dot{H}^0$投影算子, 则变量$Z(t,\tau,\xi)$的第一个分量可以写成

$$Z_1(t,\tau,\xi_1)=\xi_1+\int_\tau^t P_1\mathcal{S}(T-s)B\mathrm{d}W(s),\ t\in[\tau,T]. \tag{4.2.47}$$

令$C_b^2(\dot{H}^0,\mathbb{R})$表示$\dot{H}^0$上的二阶连续可微函数并且直到二阶的导数是有界的. 定义函数$h:\dot{H}^0\times[0,T]\to\mathbb{R}$如下

$$h(x,t)=E(g(Z_1(T,t,x))),\quad g\in C_b^2(\dot{H}^0,\mathbb{R}).$$

则这个函数满足下列Kolmogorov方程(详见文献[3]): 对$(x,t)\in\dot{H}^0\times[0,T)$,

$$\begin{cases} h_t(x,t)+\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(h_{xx}(t,x)(P_1\mathcal{S}(T-t)BQ^{\frac{1}{2}})(P_1\mathcal{S}(T-t)Q^{\frac{1}{2}})^*)=0,\\ h(x,T)=g(x),\quad x\in\dot{H}^0. \end{cases} \tag{4.2.48}$$

因为变量$\xi=\mathcal{S}(T)X_0$是一个$\mathcal{F}_0$-可测的随机变量, 根据式(4.2.5)和式(4.2.47), 有

$$Z_1(T,0,P_1S(T)X_0)=X_1(T),$$

$$h(P_1\mathcal{S}(T)X_0,0)=E(g(Z_1(T,0,P_1\mathcal{S}(T)X_0))|_{\mathcal{F}_0})=E((g(X_1(T))|_{\mathcal{F}_0}). \tag{4.2.49}$$

根据定理1.5.2中双期望的性质,

$$E(h(P_1\mathcal{S}(T)X_0,0))=E(E(g(X_1(T)))|_{\mathcal{F}_0})=E(g(X_1(T))). \tag{4.2.50}$$

因此由$h(\widetilde{X}_{h,1}(T),T)=g(\widetilde{X}_{h,1}(T))$, 弱误差$E(g(\widetilde{X}_{h,1}(T)))-E(g(X_1(T)))$可以表示成下列形式

$$\begin{aligned} & E(g(\widetilde{X}_{h,1}(T)))-E(g(X_1(T)))\\ =\ & E(h(P_1\mathcal{S}(T)X_0,0))-E(h(\widetilde{X}_{h,1}(T),T))\\ =\ & E(h(P_1\widetilde{S}_h(T)X_0,0))-E(h(P_1\mathcal{S}(T)X_0,0))+\\ & E(h(\widetilde{X}_{h,1}(T),T))-E(h(P_1\widetilde{S}_h(T)X_0,0)). \end{aligned} \tag{4.2.51}$$

根据式(4.2.51)和Itô公式(1.5.48), 可以得到$E(g(\widetilde{X}_{h,1}(T)))-E(g(X_1(T)))$的如下分解.

引理 4.2.2 如果

$$\int_0^T \mathrm{Tr}([S(t)BQ^{\frac{1}{2}}][S(t)BQ^{\frac{1}{2}}]^*)\mathrm{d}t < \infty, \tag{4.2.52}$$

则对于$\forall g \in C_b^2(\dot{H}^0, \mathbb{R})$, 成立

$$\begin{aligned} & E(g(\widetilde{X}_{h,1}(T)) - E(g(X_1(T)))) \\ = \ & E(h(P_1\mathcal{S}(T)X_0, 0)) - E(h(P_1\widetilde{\mathcal{S}}_h(T)P_hX_0, 0)) + \\ & \frac{1}{2}E\int_0^T \mathrm{Tr}\Big(h_{xx}(\widetilde{Z}_{h,1}(t), t)[(P_1\widetilde{\mathcal{S}}_h(T-t)B_h - P_1\mathcal{S}(T-t)B)Q^{\frac{1}{2}}] \times \\ & [(P_1\widetilde{\mathcal{S}}_h(T-t)B_h + P_1\mathcal{S}(T-t)B)Q^{\frac{1}{2}}]^*\Big)\mathrm{d}t := I + II, \end{aligned} \tag{4.2.53}$$

其中$\widetilde{Z}_{h,1}(t)$是变量$\widetilde{Z}_h$的第一个分量, 定义为

$$\widetilde{Z}_h(t) = \widetilde{\mathcal{S}}_h(T)X_{h,0} + \int_0^t \widetilde{\mathcal{S}}_h(T-s)B_h\mathrm{d}W(s),\ t \in (0, T]. \tag{4.2.54}$$

证明 根据式(4.2.51), 只需要证明

$$E(h(\widetilde{X}_{h,1}(T), T)) - E(h(P_1\widetilde{\mathcal{S}}_h(T)X_0, 0)) = II.$$

注意到$\widetilde{Z}_h(T) = \widetilde{X}_h(T)$和$\widetilde{Z}_h(0) = \widetilde{\mathcal{S}}_h(T)X_0$, 根据Itô公式(1.5.48),

$$\begin{aligned} & E(h(\widetilde{X}_{h,1}(T), T)) - E(h(P_1\widetilde{\mathcal{S}}_h(T)X_0, 0)) \\ = \ & E(h(\widetilde{Z}_{h,1}(T), T)) - E(h(\widetilde{Z}_{h,1}(0), 0)) \\ = \ & E\int_0^T \Big\{h_t(\widetilde{Z}_{h,1}(t), t) + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(h_{xx}(\widetilde{Z}_{h,1}(t), t) \times \\ & [P_1\widetilde{\mathcal{S}}_h(T-t)B_hQ^{\frac{1}{2}}][P_1\widetilde{\mathcal{S}}_h(T-t)B_hQ^{\frac{1}{2}}]^*)\Big\}\mathrm{d}t \\ = \ & \frac{1}{2}E\int_0^T \mathrm{Tr}\Big(h_{xx}(\widetilde{Z}_{h,1}(t), t)([P_1\widetilde{\mathcal{S}}_h(T-t)B_hQ^{\frac{1}{2}}][P_1\widetilde{\mathcal{S}}_h(T-t)B_hQ^{\frac{1}{2}}]^* - \\ & [P_1\mathcal{S}(T-t)BQ^{\frac{1}{2}}][P_1\mathcal{S}(T-t)BQ^{\frac{1}{2}}]^*)\Big)\mathrm{d}t. \\ = \ & \frac{1}{2}E\int_0^T \mathrm{Tr}\Big(h_{xx}(\widetilde{Z}_{h,1}(t), t)[(P_1\widetilde{\mathcal{S}}_h(T-t)B_h - P_1\mathcal{S}(T-t)B)Q^{\frac{1}{2}}] \times \\ & [(P_1\widetilde{\mathcal{S}}_h(T-t)B_h + P_1\mathcal{S}(T-t)B)Q^{\frac{1}{2}}]^*\Big)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

这里第四步用了式(1.1.2). 定理证毕. ¶

对于半离散问题(4.2.40)的弱误差估计, 有以下结论.

定理 4.2.6 设$X_h = [u_h, v_h]^{\mathrm{T}}$, $X = [u, v]^{\mathrm{T}}$分别是半离散问题和随机弹性方程的解. 则有

(1) 对于$A_h = (\Delta_h)^2$, $1 \leqslant \gamma \leqslant 3$, 若$X_0 \in L_2(\Omega; \mathcal{H}^{2\gamma-1})$, $\|A^{\frac{2\gamma-3}{4}}(Q^{\frac{1}{2}}(Q^{\frac{1}{2}})^*A^{-\frac{1}{4}}\|_{\mathrm{Tr}} < \infty$, 则

$$|E(g(u(T)) - g(u_h(T)))|$$

$$\leqslant \quad Ch^{\gamma-1}(\|\|X_0\|\|_{L_2(\Omega;\mathcal{H}^{2\gamma-1})} + \|A^{\frac{2\gamma-3}{4}}(Q^{\frac{1}{2}})(Q^{\frac{1}{2}})^*A^{-\frac{1}{4}}\|_{\mathrm{Tr}}). \tag{4.2.55}$$

(2) 对于$A_h = \Lambda_h$, $0 \leqslant \gamma \leqslant 3$, 如果$X_0 \in L_2(\Omega;\mathcal{H}^{2\gamma})$, $\|A^{\frac{\gamma-1}{2}}(Q^{\frac{1}{2}}(Q^{\frac{1}{2}})^*A^{-\frac{1}{2}}\|_{\mathrm{Tr}} < \infty$, 则

$$\begin{aligned} & |E(g(u(T)) - g(u_h(T)))| \\ \leqslant \quad & Ch^{\frac{4\gamma}{3}}(\|\|X_0\|\|_{L_2(\Omega;\mathcal{H}^{2\gamma})} + \|A^{\frac{\gamma-1}{2}}(Q^{\frac{1}{2}})(Q^{\frac{1}{2}})^*A^{-\frac{1}{2}}\|_{\mathrm{Tr}}). \end{aligned} \tag{4.2.56}$$

注 4.2.2 实际上, 对于$\gamma \in [1,3]$, 有$\|A^{\frac{\gamma-2}{4}}Q^{\frac{1}{2}}\|_{\mathrm{HS}}^2 \leqslant \|A^{\frac{2\gamma-3}{4}}(Q^{\frac{1}{2}}(Q^{\frac{1}{2}})^*A^{-\frac{1}{4}}\|_{\mathrm{Tr}}$. 而对于$\gamma \in [0,3]$, 有$\|A^{\frac{\gamma-2}{4}}Q^{\frac{1}{2}}\|_{\mathrm{HS}}^2 \leqslant \|A^{\frac{\gamma-1}{2}}(Q^{\frac{1}{2}}(Q^{\frac{1}{2}})^*A^{-\frac{1}{2}}\|_{\mathrm{Tr}}$. 从强误差估计结果和弱误差估计结果可以看出弱误差估计是强误差估计收敛速度的2倍.

证明 (定理4.2.6) 下面只给出式(4.2.55)的详细证明过程, 式(4.2.56)的证明过程类似, 这里不再赘述. 对于第一项, 首先注意到$P_1\widetilde{\mathcal{S}}_h(T)X_0 - P_1\mathcal{S}(T)X_0 = \mathcal{K}_h(T)X_0$. 根据中值定理有

$$\begin{aligned} |I| &= \left|E\Big(h(P_1\mathcal{S}(T)X_0,0) - h(P_1\mathcal{S}_h(T)X_0,0)\Big)\right| \\ &= \left|E\int_0^1\Big(h_x(P_1\mathcal{S}(T)X_0 + s\mathcal{K}_h(T)X_0,0),\mathcal{K}_h(T)X_0)\Big)\mathrm{d}s\right| \\ &\leqslant \sup_{x\in\dot{H}^0}\|h_x(x)\|E(\|\mathcal{K}_h(T)X_0\|). \end{aligned} \tag{4.2.57}$$

在式(4.1.35)中取$\beta = 2\gamma - 1$, $\gamma \in [1,3]$, 得

$$\|\mathcal{K}_h(t)X_0\| \leqslant Ch^{\gamma-1}\|\|X_0\|\|_{2\gamma-1},\ \gamma \in [1,3]. \tag{4.2.58}$$

因此

$$|I| \leqslant Ch^{\gamma-1}\sup_{x\in\dot{H}^0}\|h_x(x)\|\ \|\|X_0\|\|_{L_2(\Omega;\mathcal{H}^{2\gamma-1})},\ \gamma \in [1,3]. \tag{4.2.59}$$

对于第二项, 因为$\mathcal{K}_h(t) = \mathbb{A}_h^{-\frac{1}{2}}\sin(t\mathbb{A}_h^{\frac{1}{2}})\mathcal{P}_h - A^{-\frac{1}{2}}\sin(tA^{\frac{1}{2}})$, 根据式(4.1.35)得$\mathcal{K}_h(t)$是空间$\mathcal{H}$上的有界算子, 并且有下列估计

$$\|\mathcal{K}_h(t)A^{\frac{3-2\delta}{4}}\| \leqslant Ch^{\delta-1}, \quad \delta \in [1,3]. \tag{4.2.60}$$

事实上

$$P_1\widetilde{\mathcal{S}}_h(t)B_h - P_1\mathcal{S}(t)B = \mathcal{K}_h(t), \quad P_1\widetilde{\mathcal{S}}_h(t)B_h + P_1\mathcal{S}(t)B = \mathcal{K}_h(t) + 2A^{-\frac{1}{2}}\sin(tA^{\frac{1}{2}}).$$

从而可得到

$$\begin{aligned} &\mathrm{Tr}\Big(h_{xx}(\widetilde{Z}_{h,1}(t),t)[(P_1\widetilde{\mathcal{S}}_h(s)B_h - P_1\mathcal{S}(s)B)Q^{\frac{1}{2}}][(P_1\widetilde{\mathcal{S}}_h(s)B_h + P_1\mathcal{S}(s)B)Q^{\frac{1}{2}}]^*\Big) \\ = &\mathrm{Tr}\Big(h_{xx}(\widetilde{Z}_{h,1}(t),t)\mathcal{K}_h(s)A^{\frac{3-2\gamma}{4}}A^{\frac{2\gamma-3}{4}}(Q^{\frac{1}{2}})(Q^{\frac{1}{2}})^*A^{-\frac{1}{4}}A^{\frac{1}{4}}[\mathcal{K}_h(s) + 2A^{-\frac{1}{2}}\sin(sA^{\frac{1}{2}})]^*)\Big) \end{aligned}$$

$$= \mathrm{Tr}\Big(h_{xx}(\widetilde{Z}_{h,1}(t),t)\mathcal{K}_h(s)A^{\frac{3-2\gamma}{4}}A^{\frac{2\gamma-3}{4}}(Q^{\frac{1}{2}})(Q^{\frac{1}{2}})^*A^{-\frac{1}{4}}[(\mathcal{K}_h(s)+2A^{-\frac{1}{2}}\sin(sA^{\frac{1}{2}}))A^{\frac{1}{4}}]^*\Big)$$
$$\leqslant \sup_{x\in\dot{H}^0}\|h_{xx}(x)\|\,\|\mathcal{K}_h(s)A^{\frac{3-2\gamma}{4}}\|\,\|A^{\frac{2\gamma-3}{4}}(Q^{\frac{1}{2}})(Q^{\frac{1}{2}})^*A^{-\frac{1}{4}}\|_{\mathrm{Tr}}\times$$
$$\|(\mathcal{K}_h(s)+2A^{-\frac{1}{2}}\sin(sA^{\frac{1}{2}}))A^{\frac{1}{4}}\|$$
$$\leqslant Ch^{\gamma-1}\|A^{\frac{2\gamma-3}{4}}(Q^{\frac{1}{2}})(Q^{\frac{1}{2}})^*A^{-\frac{1}{4}}\|_{\mathrm{Tr}}.$$

这里最后一步用到了式(4.2.60)中$\delta=1$的情况和$\|A^{-\frac{1}{2}}\sin(tA^{\frac{1}{2}})A^{\frac{1}{4}}\|\leqslant C$. 因此

$$\begin{aligned}|II| &= \int_0^T \mathrm{Tr}\Big(h_{xx}(\widetilde{Z}_{h,1}(t),t)[(P_1\widetilde{\mathcal{S}}_h(T-t)B_h-P_1\mathcal{S}(T-t)B)Q^{\frac{1}{2}}]\times \\ &\qquad [(P_1\widetilde{\mathcal{S}}_h(T-t)B_h+P_1\mathcal{S}(T-t)B)Q^{\frac{1}{2}}]^*\Big)\mathrm{d}t \\ &\leqslant Ch^{\gamma-1}\|A^{\frac{2\gamma-3}{4}}(Q^{\frac{1}{2}})(Q^{\frac{1}{2}})^*A^{-\frac{1}{4}}\|_{\mathrm{Tr}}.\end{aligned}$$

定理证毕. ¶

下面给出全离散有限元格式(4.2.44)的弱误差估计.

定理 4.2.7 设$U^n=[U_1^n,U_2^n]^{\mathrm{T}}$, $X(t_n)=[u(t_n),v(t_n)]^{\mathrm{T}}$分别是全离散问题和随机弹性方程的解, 则

(1) 对于$A_h=(\Delta_h)^2$, $1\leqslant\gamma\leqslant 3$, 若$X_0\in L_2(\Omega;\mathcal{H}^{2\gamma-1})$, $\|A^{\frac{2\gamma-3}{4}}(Q^{\frac{1}{2}}(Q^{\frac{1}{2}})^*A^{-\frac{1}{4}}\|_{\mathrm{Tr}}<\infty$, 则

$$\begin{aligned}&|E(g(u(T))-g(U_1^N))| \\ \leqslant\ & C(k^{\frac{\gamma-1}{2}}+h^{\gamma-1})(\|\|X_0\|\|_{L_2(\Omega;\mathcal{H}^{2\gamma-1})}+\|A^{\frac{2\gamma-3}{4}}(Q^{\frac{1}{2}})(Q^{\frac{1}{2}})^*A^{-\frac{1}{4}}\|_{\mathrm{Tr}}).\end{aligned} \tag{4.2.61}$$

(2) 对于$A_h=\Lambda_h$, $0\leqslant\gamma\leqslant 3$, 如果$X_0\in L_2(\Omega;\mathcal{H}^{2\gamma})$, $\|A^{\frac{\gamma-1}{2}}(Q^{\frac{1}{2}}(Q^{\frac{1}{2}})^*A^{-\frac{1}{2}}\|_{\mathrm{Tr}}<\infty$, 则

$$\begin{aligned}&|E(g(u(T))-g(U_1^N))| \\ \leqslant\ & C(k^{\frac{\gamma}{3}}+h^{\frac{4\gamma}{3}})(\|\|X_0\|\|_{L_2(\Omega;\mathcal{H}^{2\gamma})}+\|A^{\frac{\gamma-1}{2}}(Q^{\frac{1}{2}})(Q^{\frac{1}{2}})^*A^{-\frac{1}{2}}\|_{\mathrm{Tr}}).\end{aligned} \tag{4.2.62}$$

证明 对此定理, 同样只给出式(4.2.61)的证明过程. 注意到$P_1\widetilde{\mathcal{S}}(T)-P_1\mathcal{S}_h(T)=\mathcal{K}_{k,h}^{(N)}$. 应用处理式(4.2.55)中第一项类似的方法, 可得到

$$\begin{aligned}I &= \Big|E(h(P_1\mathcal{S}(T)X_0,0)-h(P_1\mathcal{S}_h(T)X_0,0))\Big| \\ &\leqslant C(h^{\gamma-1}+k^{\frac{\gamma-1}{2}})\sup_{x\in\dot{H}^0}\|h_x(x)\|)\|\|X_0\|\|_{L_2(\Omega;\mathcal{H}^{2\gamma-1})},\ \gamma\in[1,3].\end{aligned}$$

对于第二项, $s\in[t_j,t_{j+1})$, $j=0,1,2,\cdots,N$, 有

$$\begin{aligned}&P_1\widetilde{\mathcal{S}}(s)B_h-P_1\mathcal{S}(s)B \\ =\ & r_{2,j}(\mathbb{A}_h)\mathcal{P}_h-A^{-\frac{1}{2}}\sin(t_jA^{\frac{1}{2}})+A^{-\frac{1}{2}}\sin(t_jA^{\frac{1}{2}})-A^{-\frac{1}{2}}\sin(sA^{\frac{1}{2}})\end{aligned}$$

$$= \quad \mathcal{K}_{k,h}^{(j)} + L(t_j) - L(s),$$

其中$\mathcal{K}_{k,h}^{(j)} = r_{2,j}(\mathbb{A}_h)\mathcal{P}_h - A^{-\frac{1}{2}}\sin(t_j A^{\frac{1}{2}})$, $L(s) = A^{-\frac{1}{2}}\sin(sA^{\frac{1}{2}})$. 对于$s \in [t_j, t_{j+1})$,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}\Big(h_{xx}(\widetilde{Z}_{h,1}(t),t)[P_1(\widetilde{\mathcal{S}}_h(s)B_h - \mathcal{S}(s)B)Q^{\frac{1}{2}}][P_1(\widetilde{\mathcal{S}}_h(s)B_h + \mathcal{S}(s)B)Q^{\frac{1}{2}}]^*\Big)\\
= \;& \mathrm{Tr}\Big(h_{xx}(\widetilde{Z}_{h,1}(t),t)[(\mathcal{K}_{k,h}^{(j)} + L(t_j) - L(s))Q^{\frac{1}{2}}][(\mathcal{K}_{k,h}^{(j)} + L(t_j) + L(s))Q^{\frac{1}{2}}]^*\Big)\\
= \;& \mathrm{Tr}\Big(h_{xx}(\widetilde{Z}_{h,1}(t),t)[\mathcal{K}_{k,h}^{(j)}Q^{\frac{1}{2}}][(\mathcal{K}_{k,h}^{(j)} + L(t_j) + L(s))Q^{\frac{1}{2}}]^*\Big)+\\
& \mathrm{Tr}\Big(h_{xx}(\widetilde{Z}_{h,1}(t),t)[(L(t_j) - L(s))Q^{\frac{1}{2}}][(\mathcal{K}_{k,h}^{(j)} + L(t_j) + L(s))Q^{\frac{1}{2}}]^*\Big)\\
= \;& \mathbb{I} + \mathbb{III}.
\end{aligned}$$

类似于半离散算子$\mathcal{K}_h(t)$, 由式(4.1.44), 对于$\mathcal{K}_{k,h}^{(j)}$, $j = 1, 2, 3, \cdots, N$, 有下列估计

$$\|\mathcal{K}_{k,h}^{(j)} A^{\frac{3-2\delta}{4}}\| \leqslant C(k^{\frac{\delta-1}{2}} + h^{\delta-1}),\ \delta \in [1,3]. \tag{4.2.63}$$

根据上述估计$\delta = \gamma$和$\delta = 1$的情况, 有

$$\begin{aligned}
\mathbb{I} \;&\leqslant\; \sup_{x\in \dot{H}^0} \|h_{xx}(x)\| \|\mathcal{K}_{k,h}^{(j)} A^{\frac{3-2\gamma}{4}}\| \|A^{\frac{2\gamma-3}{4}}(Q^{\frac{1}{2}})(Q^{\frac{1}{2}})^* A^{-\frac{1}{4}}\|_{\mathrm{Tr}} \|(\mathcal{K}_{k,h}^{(j)} + L(t_j) + L(s))A^{\frac{1}{4}}\|\\
&\leqslant\; C(k^{\frac{\gamma-1}{2}} + h^{\gamma-1}) \sup_{x\in \dot{H}^0} \|h_{xx}(x)\| \|A^{\frac{2\gamma-3}{4}}(Q^{\frac{1}{2}})(Q^{\frac{1}{2}})^* A^{-\frac{1}{4}}\|_{\mathrm{Tr}}.
\end{aligned} \tag{4.2.64}$$

对于$\mathbb{III}$的估计, 在引理4.1.2中取$\mu = \frac{3-\gamma}{4}$的情况和估计式(4.2.63)中$\delta = 1$的情况可以得到

$$\begin{aligned}
\mathbb{III} \;&\leqslant\; \sup_{x\in \dot{H}^0} \|h_{xx}(x)\| \|(L(t_j) - L(s))A^{\frac{3-\gamma}{4}}\| \|A^{\frac{\gamma-3}{4}}(Q^{\frac{1}{2}})(Q^{\frac{1}{2}})^* A^{-\frac{1}{4}}\|_{\mathrm{Tr}} \times\\
&\quad\; \|(\mathcal{K}_{k,h}^{(j)} + L(t_j) + L(s))A^{\frac{1}{4}})\|\\
&\leqslant\; Ck^{\frac{\gamma-1}{2}} \sup_{x\in \dot{H}^0} \|h_{xx}(x)\| \|A^{-\frac{\gamma}{4}} A^{\frac{2\gamma-3}{4}}(Q^{\frac{1}{2}})(Q^{\frac{1}{2}})^* A^{-\frac{1}{4}}\|_{\mathrm{Tr}}\\
&\leqslant\; Ck^{\frac{\gamma-1}{2}} \sup_{x\in \dot{H}^0} \|h_{xx}(x)\| \|A^{\frac{2\gamma-3}{4}}(Q^{\frac{1}{2}})(Q^{\frac{1}{2}})^* A^{-\frac{1}{4}}\|_{\mathrm{Tr}}.
\end{aligned}$$

由此估计与式(4.2.64)最终可以得到

$$|II| \leqslant C(k^{\frac{\gamma-1}{2}} + h^{\gamma-1}) \sup_{x\in \dot{H}^0} \|h_{xx}(x)\| \|A^{\frac{2\gamma-3}{4}}(Q^{\frac{1}{2}})(Q^{\frac{1}{2}})^* A^{-\frac{1}{4}}\|_{\mathrm{Tr}}. \tag{4.2.65}$$

定理证毕. ¶

4.3 带有Brownian片噪声项的随机波动方程和随机弹性方程有限元方法

4.3.1 两类随机双曲方程的统一表示形式

为了符号简单, 本节将随机波动方程和随机弹性方程用一个统一的形式表示出来. 考

虑两类随机双曲方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (-\Delta)^m u = \dot{W}, & m = 1 \text{ 或 } 2, \\ u(0,x) = u_0, \quad \dot{u}(0,x) = v_0, & \\ (\Delta)^n u(t,x) = 0,\ x \in \partial\mathcal{D}, & n = 0, m-1, \end{cases} \tag{4.3.1}$$

其中u_0, v_0是定义在$\mathcal{D} = [0, L]$上的函数, W是$\mathbb{R}_+ \times \mathcal{D}$上的Brownian片, 即$\{W(t,x), (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{D}\}$是定义在概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}, P)$上0均值的Gaussian随机变量, 协方差

$$E[W(t,x)W(s,y)] = (t \wedge s)(x \wedge y),\ \forall t, x \in \mathbb{R}_+, x, y \in \mathcal{D}.$$

注意到当$m = 1$时, 方程(4.3.1)为随机波方程, 当$m = 2$ 时, 方程(4.3.1)为随机弹性方程.

注 4.3.1 在这里只介绍线性随机双曲方程有限元方法, 这是由于非线性随机双曲方程在非线性项满足Lipschitz条件下处理方法与线性问题没有本质的区别, 处理方式主要的区别参考评注4.2.1.

设$\frac{\partial u}{\partial t} = v$, 则随机双曲方程(4.3.1)可表示为

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -(-\Delta)^m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \dot{W}. \tag{4.3.2}$$

令

$$X = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -(-\Delta)^m & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

则随机双曲方程(4.3.1)满足下列抽象形式

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \mathcal{A}X(t) + \dot{W}, X(0) = X_0. \tag{4.3.3}$$

设$A = (-\Delta)^m$. 则由算子$\mathcal{A}$生成的强连续半群为

$$S(t) = \begin{pmatrix} \cos(tA^{\frac{1}{2}}) & A^{-\frac{1}{2}} \sin(tA^{\frac{1}{2}}) \\ -A^{\frac{1}{2}} \sin(tA^{\frac{1}{2}}) & \cos(tA^{\frac{1}{2}}) \end{pmatrix}. \tag{4.3.4}$$

设$\{(\lambda_\alpha, \varepsilon_\alpha)\}_{\alpha=1}^\infty$是算子$-\Delta$的一组特征对序列, 其中特征函数列$\{\varepsilon_\alpha\}$构成$L^2(\mathcal{D})$的一组标准完备正交基, 则式(4.3.1)所对应的Green函数为

$$G(t;x,y) = \sum_{\alpha=1}^\infty \begin{pmatrix} \cos(t\lambda_\alpha^{\frac{m}{2}}) & \lambda_\alpha^{-\frac{m}{2}} \sin(t\lambda_\alpha^{\frac{m}{2}}) \\ -\lambda_\alpha^{\frac{m}{2}} \sin(t\lambda_\alpha^{\frac{m}{2}}) & \cos(t\lambda_\alpha^{\frac{m}{2}}) \end{pmatrix} \varepsilon_\alpha(x)\varepsilon_\alpha(y), \tag{4.3.5}$$

其中$\lambda_\alpha = \frac{\pi^2\alpha^2}{L^2}$, $\varepsilon_\alpha(x) = 2\sin(\frac{\pi\alpha x}{L})$. Green函数$G(t,x,y)$的意义是使得式(4.3.1)所对应的齐次问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (-\Delta)^m u = 0, & m = 1 \text{ 或 } 2, \\ u(0,x) = u_0, \quad \dot{u}(0,x) = v_0, & \\ (\Delta)^n u(t,x) = 0, \ x \in \partial\mathcal{D}, & n = 0, m-1 \end{cases} \tag{4.3.6}$$

的解可表示为

$$(u(x), v(x))^{\mathrm{T}} = \int_D G(t,x,y)\,(u_0(y), v_0(y))^{\mathrm{T}}\,\mathrm{d}y.$$

设初值u_0, v_0关于$\mathcal{F}_0$可测, 则随机双曲问题(4.3.2)解存在并且其半群表示形式为

$$X(t) = S(t)X_0 + \int_0^t S(t-s)B\dot{W}\mathrm{d}s. \tag{4.3.7}$$

上式等号两边关于特征函数ε_α展开, 得到式(4.3.2)的关于Green函数的积分解

$$X(t,x) = \int_{\mathcal{D}} G(t;x,y)X_0(y)\mathrm{d}y + \int_0^t \int_{\mathcal{D}} G(t-s;x,y)B\mathrm{d}W(s,y). \tag{4.3.8}$$

设$P_1 x = x_1$, $P_2 x = x_2$, 其中$x = [x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2$, 则$u(t) = P_1 X(t)$, $v(t) = P_2 X(t)$.

4.3.2 方程的正则化

本小节首先对噪声$\dot{W}$进行分片常数离散, 然后对方程(4.3.1)进行正则化处理.

设$N \in \mathbb{N}$, $k = \Delta t = T/N$为时间步长, 时间节点$t_n = nk$, 其中$n \in \mathcal{N} := \{0, 1, 2, \cdots, N\}$. 令$\mathcal{T}_h$表示区域$\mathcal{D}$的一个正则化剖分. 设$\Delta_n = (t_{n-1}, t_n)$, $h = \max_{K\in\mathcal{T}_h} h_K$, $S_{n,K} = \Delta_n \times K$, 其中$n \in \mathcal{N}$, $K \in \mathcal{T}_h$. 将噪声项$\dot{W}$正则化为下列分片常数函数

$$\widehat{\dot{W}}(t,x) = \sum_{n\in\mathcal{N}} \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \frac{1}{k|K|} \mathcal{X}_{S_{n,K}}(t,x)\xi_n^K, \tag{4.3.9}$$

其中$\xi_n^K := \int_{S_{n,K}} 1\mathrm{d}W$, $\mathcal{X}_S$是$S \subset [0,T] \times \overline{\mathcal{D}}$上的特征函数. 则由Brownian片的性质, 对于任意的$(n,K) \in \mathcal{N} \times \mathcal{T}_h$, $\xi_n^K \sim \mathcal{N}(0, k|K|)$并且所有随机变量$\{\xi_n^K\}_{(n,k)\in\mathcal{N}\times\mathcal{T}_h}$是相互独立的.

为了分析方便, 引进算子$\Pi : \mathcal{L}(L_2((0,T)\times\mathcal{D}))$, 定义如下

$$\Pi f(s,y)\Big|_{S_{n,K}} = \frac{1}{k|K|} \int_{S_{n,K}} f(t,x)\mathrm{d}t\mathrm{d}x, \ \forall n \in \mathcal{N}, \ \forall K \in \mathcal{T}_h, \tag{4.3.10}$$

其中$f \in L_2((0,T)\times\mathcal{D})$. 则有

$$\int_0^T \int_{\mathcal{D}} (\Pi f)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant \int_0^T \int_{\mathcal{D}} f^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t, \quad \forall f \in L_2((0,T)\times\mathcal{D}). \tag{4.3.11}$$

根据Brownian片的分片常数逼近式(4.3.9)和算子Π的定义式(4.3.10), 二者有如下关系.

引理 4.3.1 对于函数$f \in L_2((0,T)\times\mathcal{D})$, 下列关系式成立

$$\int_0^T\int_{\mathcal{D}}\Pi f(s,y)\mathrm{d}W(s,y)=\int_0^T\int_{\mathcal{D}}f(t,x)\widehat{W}(t,x)\mathrm{d}t\mathrm{d}x, \tag{4.3.12}$$

$$E\left(\int_0^T\int_{\mathcal{D}}f(t,x)\widehat{W}(t,x)\mathrm{d}t\mathrm{d}x\right)^2=\sum_{n\in\mathcal{N}}\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\frac{1}{k|K|}\left(\int_{S_{n,K}}f(t,x)\mathrm{d}t\mathrm{d}x\right)^2. \tag{4.3.13}$$

证明 这里只需证明式(4.3.12), 因为式(4.3.13)可由Itô等距式(1.5.40)和式(4.3.12)直接推得. 由算子Π的定义, Brownian片W的性质和$\widehat{W}$的定义,

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_{\mathcal{D}}\Pi f(s,y)\mathrm{d}W(s,y)\\
=\ &\frac{1}{k|K|}\sum_{n\in\mathcal{N}}\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_{S_{n,K}}f(t,x)\mathrm{d}t\mathrm{d}x\int_0^T\int_{\mathcal{D}}\mathcal{X}_{S_{n,K}}(s,y)\mathrm{d}W(s,y)\\
=\ &\frac{1}{k|K|}\sum_{n\in\mathcal{N}}\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_{S_{n,K}}f(t,x)\mathrm{d}t\mathrm{d}x\xi_n^K\\
=\ &\frac{1}{k|K|}\sum_{n\in\mathcal{N}}\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_0^T\int_{\mathcal{D}}f(t,x)\mathcal{X}_{S_{n,K}}(t,x)\xi_n^K\mathrm{d}t\mathrm{d}x\\
=\ &\int_0^T\int_{\mathcal{D}}f(t,x)\widehat{W}(t,x)\mathrm{d}t\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

引理证毕. ¶

在方程(4.3.3)中, 用$\widehat{W}$代替$\dot{W}$, 得到下列正则化问题

$$\frac{\partial\widehat{X}(t)}{\partial t}+\mathcal{A}\widehat{X}(t)=B\widehat{W}(t,x),\ t>0,\ X(0)=X_0. \tag{4.3.14}$$

类似于式(4.3.7)和式(4.3.8), 问题(4.3.14)可以表示为

$$\widehat{X}(t)=S(t)X_0+\int_0^t S(t-s)B\widehat{W}\mathrm{d}s, \tag{4.3.15}$$

和

$$\widehat{X}(t,x)=\int_{\mathcal{D}}G(t;x,y)X_0\mathrm{d}y+\int_0^t\int_{\mathcal{D}}G(t-s;x,y)B\widehat{W}\mathrm{d}s\mathrm{d}y. \tag{4.3.16}$$

4.3.3 正则化方程误差估计

本小节根据弹性方程Green函数的正则性, 在范数$|||v|||_\alpha$下给出式(4.3.8)和式(4.3.16)之间的误差估计.

范数$|||v|||_\alpha$定义为

$$|||v|||_\alpha^2:=\|v_1\|_\alpha^2+\|v_2\|_{\alpha-m}^2,\quad \forall v\in\mathcal{H}^\alpha:=\dot{H}^\alpha\times\dot{H}^{\alpha-m}.$$

当$\alpha=0$时, 记$\mathcal{H}=\mathcal{H}^0=\dot{H}^0\times\dot{H}^{-m}$, 其中的范数为$|||\cdot|||=|||\cdot|||_0$.

下文中令$a\lesssim b$表示存在一个常数C使得$a\leqslant Cb$. 则在范数$|||v|||_\alpha$下, 方程(4.3.8)和方程(4.3.16)之间有如下误差估计.

定理 4.3.1 设X, $\widehat{X}$分别由式(4.3.8)和式(4.3.16)所定义, 则有

$$E|||X(t_n)-\widehat{X}(t_n)|||^2 \lesssim k^{2-\frac{1}{m}}+h^m, \quad m=1 \text{ 或 } 2. \tag{4.3.17}$$

定理4.3.1的证明需要用到弹性方程Green函数$G(t;x,y)(t\in(0,T),\ x,y\in\mathcal{D})$的性质. 因此在证明定理4.3.1之前, 先给出弹性方程Green函数的如下正则性估计.

引理 4.3.2 设

$$\mathbb{L}=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\Delta t}\int_{\Delta_j\times\Delta_j}|||G(t_n-s;x,y)-G(t_n-s';x,y'))B|||^2\mathrm{d}s'\mathrm{d}s,$$

则有

$$\mathbb{L}\lesssim k^{2-\frac{1}{m}}+|y-y'|^m,\ m=1\text{或}2.$$

证明 为了方便给出Green函数的正则性估计, 将$\mathbb{L}$分解成以下两部分,

$$\mathbb{L}\leqslant 2\mathbb{L}_1+2\mathbb{L}_2, \tag{4.3.18}$$

其中

$$\mathbb{L}_1=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{k}\int_{\Delta_j\times\Delta_j}|||(G(t_n-s;x,y)-G(t_n-s';x,y))B|||^2\mathrm{d}s'\mathrm{d}s, \tag{4.3.19}$$

$$\mathbb{L}_2=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{k}\int_{\Delta_j\times\Delta_j}|||(G(t_n-s';x,y)-G(t_n-s';x,y'))B|||^2\mathrm{d}s'\mathrm{d}s. \tag{4.3.20}$$

首先注意到$G(t;x,y)B=\sum_{\alpha=1}^{\infty}\varepsilon_\alpha(x)\varepsilon_\alpha(y)\left(\lambda_\alpha^{-\frac{m}{2}}\sin(t\lambda_\alpha^{\frac{m}{2}}),\cos(t\lambda_\alpha^{\frac{m}{2}})\right)^T$, 根据函数序列的正交性, 有

$$\begin{aligned}
\mathbb{L}_1&=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{k}\int_{\Delta_j\times\Delta_j}\left|\left|\left|(G(t_n-s;x,y)-G(t_n-s';x,y))B\right|\right|\right|^2\mathrm{d}s'\mathrm{d}s\\
&=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{k}\int_{\Delta_j\times\Delta_j}\left\|\sum_{\alpha=1}^{\infty}\lambda_\alpha^{-\frac{m}{2}}\left(\sin((t_n-s)\lambda_\alpha^{\frac{m}{2}})-\sin((t_n-s')\lambda_\alpha^{\frac{m}{2}}\right)\varepsilon_\alpha(x)\varepsilon_\alpha(y)\right\|^2\mathrm{d}s'\mathrm{d}s+\\
&\quad\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{k}\int_{\Delta_j\times\Delta_j}\left\|\sum_{\alpha=1}^{\infty}\lambda_\alpha^{-\frac{m}{2}}\left(\cos((t_n-s)\lambda_\alpha^{\frac{m}{2}})-\cos((t_n-s')\lambda_\alpha^{\frac{m}{2}})\right)\varepsilon_\alpha(x)\varepsilon_\alpha(y)\right\|^2\mathrm{d}s'\mathrm{d}s\\
&=\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_\alpha^2(y)}{k}\sum_{j=1}^{n}\int_{\Delta_j\times\Delta_j}\lambda_\alpha^{-m}\left(\sin((t_n-s)\lambda_\alpha^{\frac{m}{2}})-\sin((t_n-s')\lambda_\alpha^{\frac{m}{2}})\right)^2\mathrm{d}s'\mathrm{d}s+\\
&\quad\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_\alpha^2(y)}{k}\sum_{j=1}^{n}\int_{\Delta_j\times\Delta_j}\lambda_\alpha^{-m}\left(\cos((t_n-s)\lambda_\alpha^{\frac{m}{2}})-\cos((t_n-s')\lambda_\alpha^{\frac{m}{2}})\right)^2\mathrm{d}s'\mathrm{d}s\\
&=\mathbb{L}_{11}+\mathbb{L}_{12}.
\end{aligned}$$

根据$|\sin((t_n-s)\lambda_\alpha^{\frac{m}{2}})-\sin((t_n-s')\lambda_\alpha^{\frac{m}{2}})|\lesssim 1\wedge k\lambda_\alpha^{\frac{m}{2}}$, 得

$$\begin{aligned}
\mathbb{L}_{11} &\lesssim \sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{(1\wedge\lambda_\alpha^{\frac{m}{2}})^2}{\lambda_\alpha^m}\lesssim\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{(1\wedge k\alpha^m)^2}{\alpha^{2m}}\\
&\lesssim \sum_{\alpha=1}^{[k^{-\frac{1}{m}}]}\frac{(1\wedge k\alpha^m)^2}{\alpha^{2m}}+\sum_{\alpha=[k^{-\frac{1}{m}}]+1}^{\infty}\frac{(1\wedge k\alpha^m)^2}{\alpha^{2m}}\\
&\lesssim \sum_{\alpha=1}^{[k^{-\frac{1}{m}}]}k^2+\sum_{\alpha=[k^{-\frac{1}{m}}]+1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^{2m}}\lesssim k^{2-\frac{1}{m}}.
\end{aligned}\tag{4.3.21}$$

利用类似的方法, 有

$$\mathbb{L}_{12}\lesssim k^{2-\frac{1}{m}}.\tag{4.3.22}$$

最后由式(4.3.21)和式(4.3.22)得

$$\mathbb{L}_{1}\lesssim k^{2-\frac{1}{m}}.\tag{4.3.23}$$

前一项估计讨论了Green函数在时间方向上的正则性, 下面讨论Green函数在空间方向上的正则性. 再次由序列$\{\varepsilon_\alpha\}_{\alpha=1}^\infty$的正交性, 有

$$\begin{aligned}
\mathbb{L}_2 &= \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{k}\int_{\Delta_j\times\Delta_j}\left\|\left|(G(t_n-s';x,y)-G(t_n-s';x,y'))B\right|\right\|^2\mathrm{d}s'\mathrm{d}s\\
&= \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{k}\int_{\Delta_j\times\Delta_j}\left\|\sum_{\alpha=1}^{\infty}\lambda_\alpha^{-\frac{m}{2}}\sin((t_n-s')\lambda_\alpha^{\frac{m}{2}})\varepsilon_\alpha(x)\Big(\varepsilon_\alpha(y)-\varepsilon_\alpha(y')\Big)\right\|^2\mathrm{d}s'\mathrm{d}s+\\
&\quad \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{k}\int_{\Delta_j\times\Delta_j}\left\|\sum_{\alpha=1}^{\infty}\lambda_\alpha^{-\frac{m}{2}}\cos((t_n-s')\lambda_\alpha^{\frac{m}{2}})\varepsilon_\alpha(x)\Big(\varepsilon_\alpha(y)-\varepsilon_\alpha(y')\Big)\right\|^2\mathrm{d}s'\mathrm{d}s\\
&= \sum_{\alpha=1}^{\infty}(\varepsilon_\alpha(y)-\varepsilon_\alpha(y'))^2\sum_{j=1}^{n}\int_{\Delta_j}\lambda_\alpha^{-m}\sin^2((t_n-s')\lambda_\alpha^{\frac{m}{2}})\mathrm{d}s'+\\
&\quad \sum_{\alpha=1}^{\infty}(\varepsilon_\alpha(y)-\varepsilon_\alpha(y'))^2\sum_{j=1}^{n}\int_{\Delta_j}\lambda_\alpha^{-m}\cos^2((t_n-s')\lambda_\alpha^{\frac{m}{2}})\mathrm{d}s'\\
&\lesssim \sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{(\varepsilon_\alpha(y)-\varepsilon_\alpha(y'))^2}{\lambda_\alpha^m}.
\end{aligned}$$

由$\{\varepsilon_\alpha\}_{\alpha=1}^\infty$的正则化估计

$$|\varepsilon_\alpha(y)-\varepsilon_\alpha(y')|\lesssim 1\wedge\alpha|y-y'|,$$

所以$\mathbb{L}_2$有估计

$$\mathbb{L}_2\lesssim\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{(1\wedge\alpha|y-y'|)^2}{\alpha^{2m}}.\tag{4.3.24}$$

下面根据m的情况对上式进行讨论. 当$m=2$时, 容易得到

$$\mathbb{L}_2 \lesssim \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{(1\wedge\alpha|y-y'|)^2}{\alpha^4} \lesssim \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{|y-y'|^2}{\alpha^2} \lesssim |y-y'|^2. \tag{4.3.25}$$

当$m=1$时,

$$\begin{aligned}\mathbb{L}_2 &\lesssim \sum_{\alpha=1}^{[\frac{1}{|y-y'|}]} \frac{(1\wedge\alpha|y-y'|)^2}{\alpha^2} + \sum_{\alpha=[\frac{1}{|y-y'|}]+1}^{\infty} \frac{(1\wedge\alpha|y-y'|)^2}{\alpha^2} \\ &\lesssim \sum_{\alpha=1}^{[\frac{1}{|y-y'|}]} |y-y'|^2 + \sum_{\alpha=[\frac{1}{|y-y'|}]+1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2} \lesssim |y-y'|. \end{aligned}\tag{4.3.26}$$

因此由式(4.3.25)和式(4.3.26), 得到$\mathbb{L}_2$的估计如下,

$$\mathbb{L}_2 \lesssim |y-y'|^m. \tag{4.3.27}$$

引理证毕. ¶

下面根据弹性方程Green函数正则性估计引理4.3.2的结果, 给出定理4.3.1的证明.

证明 (定理4.3.1) 首先由式(4.3.4), 式(4.3.16)和引理4.3.1得到

$$X(t_n) - \widehat{X}(t_n) = \int_0^{t_n}\int_{\mathcal{D}} \Big(G(t_n-s,x,y) - \widetilde{G}(t_n,x;s,y)\Big) B\mathrm{d}W,$$

其中$\widetilde{G}:(0,T)\times\mathcal{D}\to L^2((0,T)\times\mathcal{D})$定义为

$$\widetilde{G}(t,x;s,y)|_{(s,y)\in S_{j,K}} = \frac{1}{k|K|}\int_{S_{j,K}} \chi_{(0,t)}(s')G(t-s';x,y')\mathrm{d}s'\mathrm{d}y',\ \forall(t,x)\in(0,T)\times\mathcal{D}.$$

实际上$u(t_n)-\widehat{u}(t_n) = P_1(X(t_n)-\widehat{X}(t_n))$, 对上式取期望得

$$\begin{aligned}
&E(u(t_n,x)-\widehat{u}(t_n,x))^2 \\
=\ & E\left(\int_0^{t_n}\int_{\mathcal{D}} P_1(G(t_n-s;x,y)-\widetilde{G}(t_n,x;s,y))B\mathrm{d}W(s,y)\right)^2 \\
=\ & \int_0^{t_n}\int_{\mathcal{D}} \Big(P_1(G(t_n-s;x,y)-\widetilde{G}(t_n,x;s,y))B\Big)^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}s \\
=\ & \sum_{j=1}^{n}\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_{S_{j,K}} \left(P_1(G(t_n-s;x,y) - \frac{1}{k|K|}\int_{S_{j,K}} G(t_n-s';x,y'))B\mathrm{d}s'\mathrm{d}y'\right)^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}s \\
\leqslant\ & \sum_{j=1}^{n}\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\frac{1}{k|K|}\int_{S_{j,K}\times S_{j,K}} \Big(P_1\Big(G(t_n-s;x,y)-G(t_n-s';x,y')\Big)B\Big)^2 \mathrm{d}s'\mathrm{d}y'\mathrm{d}s\mathrm{d}y \\
\leqslant\ & \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\frac{1}{|K|}\int_{K\times K}\Bigg(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{k}\int_{\Delta_j\times\Delta_j}\times \\
& \Big(P_1\Big(G(t_n-s;x,y)-G(t_n-s';x,y')\Big)B\Big)^2\mathrm{d}s'\mathrm{d}s\Bigg)\mathrm{d}y'\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

设$\mathcal{E}_1 = E\|u(t_n,x)-\widehat{u}(t_n,x)\|^2$, 则有

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1 \quad &\leqslant \int_{\mathcal{D}}\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\frac{1}{|K|}\int_{K\times K}\Bigg(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{k}\int_{\Delta_j\times\Delta_j}\times\\ &\quad \Bigg(P_1\Bigg(G(t_n-s;x,y)-G(t_n-s';x,y')\Bigg)B\Bigg)^2\mathrm{d}s'\mathrm{d}s\Bigg)\mathrm{d}y'\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\ &\leqslant \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\frac{1}{|K|}\int_{K\times K}\Bigg(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{k}\int_{\Delta_n\times\Delta_n}\int_{\mathcal{D}}\times\\ &\quad \Bigg(P_1\Bigg(G(t_n-s;x,y)-G(t_n-s';x,y')\Bigg)B\Bigg)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s'\mathrm{d}s\Bigg)\mathrm{d}y'\mathrm{d}y\\ &\leqslant \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\frac{1}{|K|}\int_{K\times K}\mathbb{L}_1(y,y')\mathrm{d}y'\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

其中$\mathbb{L}_1(y,y')$在引理4.3.2中给出. 设$\mathcal{E}_2 = \mathrm{E}\|A^{-\frac{m}{2}}(v(t_n,x)-\widehat{v}(t_n,x))\|^2$. 使用类似的方法, 有

$$\mathcal{E}_2 \leqslant \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\frac{1}{|K|}\int_{K\times K}\mathbb{L}_2(y,y')\mathrm{d}y'\mathrm{d}y,$$

其中$\mathbb{L}_2(y,y')$也在引理4.3.2中给出.

最后根据范数$|||\cdot|||$的定义和引理4.3.2, 有

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}|||X(t_n)-X(t_n)|||^2 \lesssim \mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2\\ \lesssim &\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\frac{1}{|K|}\int_{K\times K}\mathbb{L}_1(y,y')\mathrm{d}y'\mathrm{d}y+\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\frac{1}{|K|}\int_{K\times K}\mathbb{L}_2(y,y')\mathrm{d}y'\mathrm{d}y\\ \leqslant &\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\frac{1}{|K|}\int_{K\times K}\mathbb{L}(y,y')\mathrm{d}y'\mathrm{d}y \lesssim k^{2-\frac{1}{m}}+h^m.\end{aligned}$$

定理证毕. ¶

4.3.4 随机指数积分法

在4.2.3节和4.2.5节全离散格式中, 时间上的离散采用的是Euler格式, 即用差商代替导数. Euler格式的精度较低, 而指数积分方法比Euler格式具有更高的收敛精度, 所以本小节研究方程(4.3.14)的指数积分法.

设k为时间步长, 时间节点$t_n = kn$, 则离散格式为: 求$\widetilde{X}^n = [\widetilde{u}^n, \widetilde{v}^n]^{\mathrm{T}}$, $n = 1,2,\cdots$, 使得

$$\begin{cases}\widetilde{X}^n = S(k)\widetilde{X}^{n-1}+\int_{t_{n-1}}^{t_n}S(k)B\widehat{W}\mathrm{d}s,\\ \widetilde{X}^0 = X_0.\end{cases}\tag{4.3.28}$$

方程(4.3.28)的解可以表示为

$$\widetilde{X}^n = S(t_n)X_0+\int_0^T\int_{\mathcal{D}}\mathcal{X}_{(0,t_n)}(s)G(t_n-[s];x,y)B\widehat{W}(s,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s,\tag{4.3.29}$$

其中$s\in[t_{j-1},t_j)$, $[s] = t_{j-1}$. 对于随机抛物方程和双曲方程的指数积分法的研究, 可见文献[25, 28, 55], 与之不同的是, 这里的噪声项是时间空间Brownian片白噪声.

注 4.3.2 由于确定线性双曲方程是能量守恒的，在方程(4.3.28)中，如果$\widehat{W}$被Q-Wiener过程

$$W=\sum_{\alpha=1}^{\infty}\gamma_{\alpha}^{\frac{1}{2}}\varepsilon_{\alpha}(x)\beta_{\alpha}(t)$$

代替，当$\mathrm{Tr}(Q)=\sum\limits_{\alpha=1}^{\infty}\gamma_{\alpha}<\infty$时，能量数的期望值随着时间线性增长，即

$$E\left(\|A^{\frac{1}{2}}\widetilde{u}^n\|^2+\|\widetilde{v}^n\|^2\right)=E\left(\|A^{\frac{1}{2}}u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)+t_n\mathrm{Tr}(Q).$$

然而在本节中，能量数的期望值为

$$E\left(\|A^{\frac{1}{2}}\widetilde{u}^n\|^2+\|\widetilde{v}^n\|^2\right)=E\left(\|A^{\frac{1}{2}}u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)+\sum_{\alpha=1}^{\infty}\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\frac{1}{|K|}\left(\int_K\varepsilon_{\alpha}(x)\mathrm{d}x\right)^2.$$

很显然，这个能量数的期望是不收敛的.

为证指数积分法(4.3.28)的误差估计，首先需要证明式(4.3.4)定义的半群S的如下正则性估计.

引理 4.3.3 设d_j^{α}定义如下

$$d_j^{\alpha}=\int_{t_{j-1}}^{t_j}|||\left(S(t_{n-j+1})-S(t_n-\tau)\right)B\varepsilon_{\alpha}|||^2\,\mathrm{d}\tau.$$

则有下列估计

$$\sum_{j=1}^{n}d_j^{\alpha}\lesssim k^{2-\frac{1}{m}}. \tag{4.3.30}$$

证明 这里只给出$m=1$时，式(4.3.30)的证明. 另一种情况的证明是类似的. 注意到$A=-\Delta$，根据范数$|||\cdot|||$和半群$S(t)$的定义，有

$$\begin{aligned}d_j^{\alpha}&=\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left\|A^{-\frac{1}{2}}\left(\sin((t_{n-j+1})A^{\frac{1}{2}})-\sin((t_n-\tau)A^{\frac{1}{2}})\right)\varepsilon_{\alpha}\right\|^2\mathrm{d}\tau+\\&\quad\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left\|A^{-\frac{1}{2}}\left(\cos((t_{n-j+1})A^{\frac{1}{2}})-\cos((t_n-\tau)A^{\frac{1}{2}})\right)\varepsilon_{\alpha}\right\|^2\mathrm{d}\tau\\&=d_{1,j}^{\alpha}+d_{2,j}^{\alpha}.\end{aligned}$$

下面对$d_{1,j}^{\alpha}$，$d_{2,j}^{\alpha}$分别进行估计. 因为$\{(\varepsilon_{\alpha},\lambda_{\alpha})\}_{\alpha=1}^{\infty}$是Laplace算子$-\Delta$的特征对序列，所以有

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}d_{1,j}^{\alpha}&\lesssim\sum_{\alpha=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left\|A^{-\frac{1}{2}}\left(\sin((t_{n-j+1})A^{\frac{1}{2}})-\sin((t_n-\tau)A^{\frac{1}{2}})\right)\varepsilon_{\alpha}\right\|^2\mathrm{d}\tau\\&\lesssim\sum_{\alpha=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left\|\lambda_{\alpha}^{-\frac{1}{2}}\left(\sin((t_{n-j+1})\lambda_{\alpha}^{\frac{1}{2}})-\sin((t_n-\tau)\lambda_{\alpha}^{\frac{1}{2}})\right)\varepsilon_{\alpha}\right\|^2\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

$$\lesssim \sum_{\alpha=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\lambda_\alpha^{-1}\Big(\sin((t_{n-j+1})\lambda_\alpha^{\frac{1}{2}})-\sin((t_n-\tau)\lambda_\alpha^{\frac{1}{2}})\Big)^2\mathrm{d}\tau, \qquad (4.3.31)$$

其中$(\varepsilon_\alpha)_{\alpha=1}^{\infty}$是空间$L^2(\mathcal{D})$的一组标准完备正交基. 因为

$$|\sin((t_{n-j+1})\lambda_\alpha^{\frac{1}{2}})-\sin((t_n-\tau)\lambda_\alpha^{\frac{1}{2}})|\lesssim 1\wedge k\lambda_\alpha^{\frac{1}{2}}, \qquad (4.3.32)$$

所以

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}d_{1,j}^{\alpha} &\lesssim \sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{(1\wedge k\lambda_\alpha^{\frac{1}{2}})^2}{\lambda_\alpha}\lesssim\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{(1\wedge k\alpha)^2}{\alpha^2}\\ &\lesssim \sum_{\alpha=1}^{[k^{-1}]}\frac{(1\wedge k\alpha)^2}{\alpha^2}+\sum_{[k^{-1}]}^{\infty}\frac{(1\wedge k\alpha)^2}{\alpha^2}\\ &\lesssim \sum_{\alpha=1}^{[k^{-1}]}k^2+\sum_{[k^{-1}]}^{\infty}\frac{1}{\alpha^2}\lesssim k. \end{aligned} \qquad (4.3.33)$$

类似地, 对$d_{2,j}^{\alpha}$有估计

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}d_{2,j}^{\alpha}\lesssim k. \qquad (4.3.34)$$

引理证毕. ¶

现在给出随机指数积分数值方法(4.3.28)的误差收敛性.

定理 4.3.2 数值方法(4.3.28)满足下列误差估计

$$E\|\hat{X}(t_n)-\widetilde{X}^n\|^2\lesssim k^{2-\frac{1}{m}}.$$

证明 设$\epsilon := E\|\hat{X}(t_n)-\widetilde{X}^n\|^2$. 将方程(4.3.14)的解和式(4.3.28)的解相减, 然后由引理4.3.1得

$$\begin{aligned}\epsilon &= E\Big\|\int_0^T\int_{\mathcal{D}}\mathcal{X}_{(0,t_n)}(\tau)\Big(G(t_n-[\tau];x,y)-G(t_n-\tau;x,y)\Big)B\widehat{W}\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau\Big\|^2\\ &= \int_{\mathcal{D}}\sum_{j\in\mathcal{N}}\sum_{K\in T_h}\frac{1}{k|K|}\Big(\int_{S_{j,K}}\mathcal{X}_{(0,t_n)}(\tau)\times\\ &\quad B_1\Big(G(t_n-[\tau];x,y)-G(t_n-\tau;x,y)\Big)B\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau\Big)^2\mathrm{d}x+\\ &\quad \int_{\mathcal{D}}\sum_{j\in\mathcal{N}}\sum_{K\in T_h}\frac{1}{k|K|}\Big(\int_{S_{j,K}}\mathcal{X}_{(0,t_n)}(\tau)A^{-\frac{1}{2}}\times\\ &\quad B_2\Big(G(t_n-[\tau];x,y)-G(t_n-\tau;x,y)\Big)B\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau\Big)^2\mathrm{d}x\\ &= \epsilon_1+\epsilon_2.\end{aligned}$$

下面对ϵ_1, ϵ_2两项分别进行估计. 由Hölder不等式可得到ϵ_1的估计如下,

$$
\begin{aligned}
\epsilon_1 &\lesssim \int_0^{t_n}\int_{\mathcal{D}}\int_{\mathcal{D}}\Big(B_1\Big(G(t_n-[\tau];x,y)-G(t_n-\tau;x,y)\Big)B\Big)^2\mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau \\
&\lesssim \sum_{j=1}^{n}\int_{\Delta_j}\int_{\mathcal{D}}\int_{\mathcal{D}}\Big(B_1\Big(G(t_{n-j+1};x,y)-G(t_n-\tau;x,y)\Big)B\Big)^2\mathrm{d}y\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}\tau \\
&\lesssim \sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\Big\|B_1\Big(S(t_{n-j+1})-S(t_n-\tau)\Big)B\Big\|_{\mathrm{HS}}^2\mathrm{d}\tau. \qquad (4.3.35)
\end{aligned}
$$

类似地,

$$
\epsilon_2 \lesssim \sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\Big\|A^{-\frac{1}{2}}B_2\Big(S(t_{n-j+1})-S(t_n-\tau)\Big)B\Big\|_{\mathrm{HS}}^2\mathrm{d}\tau. \qquad (4.3.36)
$$

因此

$$
\epsilon \leqslant \sum_{\alpha=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\Big\|\Big|\Big(S(t_{n-j+1})-S(t_n-\tau)\Big)B\varepsilon_\alpha\Big\|\Big|^2\mathrm{d}s \leqslant \sum_{\alpha=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}d_j^\alpha.
$$

最后由上述估计和引理4.3.3可得最后的结论. 定理证毕. ¶

4.3.5 全离散有限元逼近

本小节研究式(4.3.28)的全离散有限元方法. 在给出有限元误差估计之前, 先给出线性双曲方程的有限元方法的误差估计和离散算子的Green函数.

设$\{\mathcal{T}_h\}$是区域$\mathcal{D}$的一个正则化剖分, h是网格直径. 设$\mathcal{S}_h^{\varrho(r)} \subset H_0^1(\mathcal{D})\cap H^{\varrho(r)}(\mathcal{D})$是剖分$\{\mathcal{T}_h\}$上分片多项式构成的$C^{\varrho(r)-1}$空间, 其中$\varrho(r)=1,2$. 当$\varrho(r)=1$时, 取一次分片多项式组成的连续空间$S_h^1$, 当$\varrho(r)=2$时取三次多项式组成的$C^1$空间$S_h^2$ (例如分片Hermite多项式). 设$\mathbb{P}_h$是空间$\dot{H}^{-\varrho(r)}$到$\mathcal{S}_h^{\varrho(r)}$的投影算子, 定义如下

$$
(\mathbb{P}_h v,\chi)=(v,\chi), \forall v\in\dot{H}^{-\varrho(r)},\ \chi\in S_h^{\varrho(r)}.
$$

投影算子$\mathcal{R}_h:\dot{H}^1\to S_h^1$, $R_h:\dot{H}^2\to S_h^2$分别定义如下

$$
(\nabla\mathcal{R}_h v,\nabla\chi)=(\nabla v,\nabla\chi),\ \forall v\in\dot{H}^1,\forall\chi\in\mathcal{S}_h^1,\quad (\Delta R_h v,\Delta\chi)=(\Delta v,\Delta\chi),\ \forall v\in\dot{H}^2,\forall\chi\in\mathcal{S}_h^2.
$$

则有

$$
\begin{cases}
\|(\mathcal{R}_h-I)v\|_r\leqslant Ch^{s-r}\|v\|_s, & r=0,1,\ s=1,2,\ v\in\dot{H}^s,\\
\|(R_h-I)v\|_r\leqslant Ch^{s-r}\|v\|_s, & r=0,1,2,\ s=2,3,4,\ v\in\dot{H}^s.
\end{cases} \qquad (4.3.37)
$$

进一步定义离散的Laplace算子$\Delta_h:S_h^1\to S_h^1$,

$$
\langle\Delta_h v_h,w_h\rangle=\langle\nabla v_h,\nabla w_h\rangle,\ \forall v_h,w_h\in S_h^1, \qquad (4.3.38)
$$

和离散的双调和算子$\Lambda_h:S_h^2\to S_h^2$,

$$
\langle\Lambda_h v_h,w_h\rangle=\langle\Delta v_h,\Delta w_h\rangle,\forall v_h,w_h\in\mathcal{S}_h^2. \qquad (4.3.39)
$$

设A_h是算子A在空间方向上的逼近算子. 注意当$A=-\Delta$时, $A_h=\Delta_h$, 当$A=(-\Delta)^2$时, $A_h=\Lambda_h$, 并且$\mathbb{P}_hA=A_h\mathbb{R}_h$, 其中$\mathbb{R}_h=\mathcal{R}_h$或$\mathbb{R}_h=R_h$. 在上述有限元空间的假设下, 有下面结论

$$\|A_h^\alpha\mathbb{P}_hf\|\lesssim\|A^\alpha f\|,\qquad\forall f\in D(A^\alpha),\quad -\frac{1}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{1}{2},\tag{4.3.40}$$

$$\|A^\alpha\mathbb{P}_hf\|\lesssim\|A_h^\alpha\mathbb{P}_hf\|,\qquad\forall f\in D(A^\alpha),\quad -\frac{1}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{1}{2}.\tag{4.3.41}$$

由于$r(k\mathcal{A})=\frac{1}{1+k\mathcal{A}}$是$S(k)$在时间方向上的逼近算子. 设$\mathcal{A}_h=\begin{pmatrix}0 & I\\ -A_h & 0\end{pmatrix}$, 则算子$r(k\mathcal{A}_h)$是$S(k)$在时间和空间上的逼近算子. 随机双曲方程(4.3.1)的全离散有限元格式为: 求

$$U_h^n=(U_{h,1}^n,U_{h,2}^n)^T\in S_h^{\varrho(r)}\times S_h^{\varrho(r)},n=1,2,\cdots,N,$$

使得

$$\begin{cases}U_h^n-U_h^{n-1}+k\mathcal{A}_hU_h^n=\int_{t_{n-1}}^{t_n}\mathbb{P}_hB\widehat{W}\mathrm{d}s,\quad n=1,2,\cdots,N,\\ U_h^0=\mathbb{P}_hX_0.\end{cases}\tag{4.3.42}$$

设$S_{k,h}=r(k\mathcal{A}_h)$, 则式(4.3.42)可写成

$$U_h^n=S_{k,h}^n\mathbb{P}_hX_0+\sum_{j=1}^n\int_{t_{j-1}}^{t_j}S_{k,h}^{n-j+1}\mathbb{P}_hB\widehat{W}\mathrm{d}s.\tag{4.3.43}$$

设$Y_0=[f,g]^\mathrm{T}$, $w(t)=[w_1(t),w_2(t)]^\mathrm{T}=S(t)Y_0$和$W_h^n=[W_{h,1}^n,W_{h,2}^n]^\mathrm{T}:=S_{k,h}^n\mathbb{P}_hY_0$. 则$w(t)$是对应初值为$Y_0$的线性双曲方程的解, W_h^n是其全离散有限元问题的解. 下面给出w和W_h^n在范数$|||\cdot|||$下的有限元误差估计.

定理 4.3.3 设$Y_0=[f,g]^\mathrm{T}$, $\mathcal{F}_{k,h}^n=(S_{k,h}^n\mathbb{P}_h-S(t_n))Y_0$. 对$x=[x_1,x_2]^\mathrm{T}\in\mathcal{H}^\beta$, 设$P_1:\mathcal{H}^\beta\to\dot{H}^\beta$, $P_2:\mathcal{H}^\beta\to\dot{H}^{\beta-m}$分别定义为$P_1x=x_1$和$P_2x=x_2$, 则有

(1) 对于波方程有

$$\|P_1\mathcal{F}_{k,h}^nY_0\|\lesssim|||\mathcal{F}_{k,h}^nY_0|||\lesssim(k^{\frac{\beta}{3}}+h^{\frac{2\beta}{3}})(\|f\|_\beta+\|g\|_{\beta-1}),\ \beta\in[0,3];\tag{4.3.44}$$

$$\|P_2\mathcal{F}_{k,h}^nY_0\|\lesssim|||\mathcal{F}^nY_0|||_1\lesssim(k^{\frac{\beta-1}{3}}+h^{\frac{2(\beta-1)}{3}})(\|f\|_\beta+\|g\|_{\beta-1}),\ \beta\in[1,4].\tag{4.3.45}$$

(2) 对于弹性方程有

$$\|P_1\mathcal{F}_{k,h}^nY_0\|\lesssim\|\mathcal{F}_{k,h}^nY_0|||\lesssim(k^{\frac{\beta}{3}}+h^{\frac{4\beta}{3}})(\|f\|_{2\beta}+\|g\|_{2\beta-2}),\ \beta\in[0,3];\tag{4.3.46}$$

$$\|P_2\mathcal{F}_{k,h}^nY_0\|\lesssim\|\mathcal{F}_{k,h}^nY_0|||_2\lesssim(k^{\frac{\beta-1}{3}}+h^{\frac{4(\beta-1)}{3}})(\|f\|_{2\beta}+\|g\|_{2\beta-2}),\ \beta\in[1,4].\tag{4.3.47}$$

注 4.3.3 关于线性波方程全离散有限元误差的结果可见参考文献[34]. 在文献[34]中, 当$\beta=3$时, 初值条件为$(f,g)\in(\dot{H}^{\beta+1},\dot{H}^{\beta})$. 对比式(4.3.44)和式(4.3.45), 这里只需要$(f,g)\in(\dot{H}^{\beta},\dot{H}^{\beta-1})$, 从而降低了对初值的要求.

证明 只给出式(4.3.44)的证明, 使用类似的方法可得其它结论. 在这种情况下, $A=-\Delta$, $A_h=\Delta_h$, $\mathbb{R}_h=\mathcal{R}_h$, 范数$|||v|||_{\alpha}^2=\|v_1\|_{\alpha}^2+\|v_2\|_{\alpha-1}^2$, $v\in\mathcal{H}^{\alpha}$. 设$e_n=(S(t_n)-S_{k,h}^n\mathbb{P}_h)Y_0$. 根据插值理论定理1.2.12, 只需要证明

$$|||e_n|||\lesssim|||Y_0|||, \tag{4.3.48}$$

和

$$|||e_n|||\lesssim(k+h^2)|||Y_0|||_3. \tag{4.3.49}$$

线性齐次双曲方程

$$\dot{w}_2-\Delta w_1=0, \tag{4.3.50}$$

$$\dot{w}_1-w_2=0, \tag{4.3.51}$$

的解有下列性质

$$\|D_t^r w_2(t)\|_{\alpha}^2+\|D_t^r w_1(t)\|_{\alpha+1}^2=\|g^r\|_{\alpha}^2+\|f^r\|_{\alpha+1}^2, \tag{4.3.52}$$

其中对于$r=1,2,3,\cdots$,

$$f^r=A^k f,\quad g^r=A^k g,\qquad r=2k, \tag{4.3.53}$$

$$f^r=A^k g,\quad g^r=A^{k+1} f,\qquad r=2k+1. \tag{4.3.54}$$

方程(4.3.50)和(4.3.51)的全离散有限元格式为: 求$W_h=[W_{h,1}^n,W_{h,2}^n]^{\mathrm{T}}\in S_h^{\varrho(r)}\times S_h^{\varrho(r)}$, 使得

$$\overline{\partial}W_{h,2}^n+A_hW_{h,1}^n=0, \tag{4.3.55}$$

$$\overline{\partial}W_{h,1}^n-W_{h,2}^n=0, \tag{4.3.56}$$

其中$\overline{\partial}W_{h,i}^n=\frac{W_{h,i}^n-W_{h,i}^{n-1}}{k}$, $i=1,2$.

下面证明式(4.3.48). 方程(4.3.55)和式(4.3.56)分别乘以$A_h^{-1}W_{h,2}^n$和$W_{h,1}^n$, 得

$$(\overline{\partial}W_{h,1}^n,W_{h,1}^n)+(\overline{\partial}W_{h,2}^n,A_h^{-1}W_{h,2}^n)-(W_{h,2}^n,W_{h,1}^n)+(A_hW_{h,1}^n,A_h^{-1}W_{h,2}^n)=0. \tag{4.3.57}$$

由$(A_hW_{h,1}^n,A_h^{-1}W_{h,2}^n)-(W_{h,2}^n,W_{h,1}^n)=0$, 得

$$\frac{\|W_{h,1}^n\|^2-\|W_{h,1}^{n-1}\|^2}{k}+\frac{\|A_h^{-\frac{1}{2}}W_{h,2}^n\|^2-\|A_h^{-\frac{1}{2}}W_{h,2}^{n-1}\|^2}{k}\leqslant 0.$$

由上式与式(4.3.40)和式(4.3.41)可以得到

$$\|W_{h,1}^n\|^2+\|A_h^{-\frac{1}{2}}W_{h,2}^n\|^2\quad\lesssim\quad\|W_{h,1}^n\|^2+\|A_h^{-\frac{1}{2}}W_{h,2}^n\|^2\lesssim\|W_{h,1}^0\|^2+\|A_h^{-\frac{1}{2}}W_{h,2}^0\|^2$$

$$\lesssim \quad \|\mathbb{P}_h f\|^2 + \|A_h^{-\frac{1}{2}}\mathbb{P}_h g\|^2 \lesssim \|f\|_1^2 + \|g\|_{-1}^2. \tag{4.3.58}$$

由上述估计和三角不等式即可得式(4.3.48)的证明.

下面证明式(4.3.49). 设

$$\begin{aligned} W_{h,1}^n - w_1(t_n) &= W_{h,1}^n - \mathcal{R}_h w_1(t_n) + \mathcal{R}_h w_1(t_n) - w_1(t_n) = \theta_1^n + \rho_1^n, &(4.3.59)\\ W_{h,2}^n - w_2(t_n) &= W_{h,2}^n - \mathbb{P}_h w_2(t_n) + \mathbb{P}_h w_2(t_n) - w_2(t_n) = \theta_2^n + \rho_2^n. &(4.3.60) \end{aligned}$$

由方程(4.3.50)和(4.3.51), 方程(4.3.55)和(4.3.56), 得到

$$\overline{\partial}\theta_1^n - \theta_2^n = \partial_t w_1^n - \overline{\partial} w_1^n - \overline{\partial}\rho_1^n + \rho_2^n, \tag{4.3.61}$$

$$\overline{\partial}\theta_2^n + A_h\theta_1^n = \partial_t w_2^n - \overline{\partial} w_2^n - \overline{\partial}\rho_2^n + (Aw_1^n - A_h\mathcal{R}_h w_1^n), \tag{4.3.62}$$

其中$w_i^n = w_i(t_n)$, $\partial_t w_i^n = \dot{w}_i(t_n)$, $i = 1, 2$. 方程(4.3.61)两端与θ_1^n做内积得,

$$(\overline{\partial}\theta_1^n, \theta_1^n) - (\theta_2^n, \theta_1^n) = (\partial_t w_1^n - \overline{\partial} w_1^n, \theta_1^n) - (\overline{\partial}\rho_1^n, \theta_1^n) + (\rho_2^n, \theta_1^n), \tag{4.3.63}$$

方程(4.3.62)两边与$A_h^{-1}\theta_2^n$做内积得

$$\begin{aligned} &(\overline{\partial}\theta_2^n, A_h^{-1}\theta_2^n) + (A_h\theta_1^n, A_h^{-1}\theta_2^n)\\ = \ &(\partial_t w_2^n - \overline{\partial} w_2^n, A_h^{-1}\theta_2^n) - (\overline{\partial}\rho_2^n, A_h^{-1}\theta_2^n) + (Aw_1^n - A_h\mathcal{R}_h w_1^n, A_h^{-1}\theta_2^n). \qquad (4.3.64) \end{aligned}$$

注意到

$$(A_h\theta_1^n, A_h^{-1}\theta_2^n) = (\theta_1^n, \theta_2^n),\ A_h\mathcal{R}_h = \mathbb{P}_h A,\ (\rho_2^n, \theta_1^n) = (\overline{\partial}\rho_2^n, A_h^{-1}\theta_2^n) = 0.$$

方程(4.3.63)和方程(4.3.64)相减得

$$\begin{aligned} (\overline{\partial}\theta_1^n, \theta_1^n) + (\overline{\partial}\theta_2^n, A_h^{-1}\theta_2^n) &= (\partial_t w_1^n - \overline{\partial} w_1^n, \theta_1^n) - (\overline{\partial}\rho_1^n, \theta_1^n) + (\partial_t w_2^n - \overline{\partial} w_2^n, A_h^{-1}\theta_2^n)\\ &\lesssim \|\mathbb{P}_h(\partial_t w_1^n - \overline{\partial} w_1^n)\|^2 + \|A_h^{-\frac{1}{2}}\mathbb{P}_h(\partial_t w_2^n - \overline{\partial} w_2^n)\|^2 +\\ &\quad \|\mathbb{P}_h\overline{\partial}\rho_1^n\|^2 + \|\theta_1^n\|^2 + \|A_h^{-\frac{1}{2}}\theta_2^n\|^2. \qquad (4.3.65) \end{aligned}$$

对于$n \geqslant 1$, 由上式可推得

$$\frac{\|\theta_1^n\|^2 - \|\theta_1^{n-1}\|^2}{k} + \frac{\|A_h^{-\frac{1}{2}}\theta_2^n\|^2 - \|A_h^{-\frac{1}{2}}\theta_2^{n-1}\|^2}{k} \lesssim (\overline{\partial}\theta_1^n, \theta_1^n) + (\overline{\partial}\theta_2^n, A_h^{-1}\theta_2^n). \tag{4.3.66}$$

将上式重复相加, 然后由$\theta_2^0 = 0$, 得

$$\begin{aligned} \|\theta_1^n\|^2 + \|A_h^{-\frac{1}{2}}\theta_2^n\|^2 \ &\lesssim \ \sum_{j=1}^n k(\|\mathbb{P}_h(\partial_t w_1^j - \overline{\partial} w_1^j)\|^2 + \|A_h^{-\frac{1}{2}}\mathbb{P}_h(\partial_t w_2^j - \overline{\partial} w_2^j)\|^2 +\\ &\quad \|\mathbb{P}_h\overline{\partial}\rho_1^j\|^2 + \sum_{j=1}^n k(\|\theta_1^j\|^2 + \|A_h^{-\frac{1}{2}}\theta_2^j\|^2) + \|\theta_1^0\|^2. \qquad (4.3.67) \end{aligned}$$

下面对上式右端各项分别进行估计. 首先由分部积分得

$$\partial_t w_i(t_n) - \frac{w_i^n - w_i^{n-1}}{k} = \frac{1}{k}\int_{t_{n-1}}^{t_n} (s - t_{n-1})\partial_{tt} w_i(s)\mathrm{d}s,\ i = 1, 2, \tag{4.3.68}$$

再根据$\mathbb{P}_h$在H^1和H^{-1}上的有界性和式(4.3.52),

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^n k(\|\mathbb{P}_h(\partial_t w_1^j - \overline{\partial} w_1^j)\|^2 + \|A_h^{-\frac{1}{2}}\mathbb{P}_h(\partial_t w_2^j - \overline{\partial} w_2^j)\|^2 \\
= &\sum_{j=1}^n k\left(\left\|\mathbb{P}_h\left(\frac{1}{k}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(s - t_{j-1})\partial_{tt} w_1(s)\mathrm{d}s\right)\right\|^2 + \right. \\
&\left.\left\|A_h^{-\frac{1}{2}}\mathbb{P}_h\left(\frac{1}{k}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(s - t_{j-1})\partial_{tt} w_2(s)\mathrm{d}s\right)\right\|^2\right) \\
\lesssim &\sum_{j=1}^n k\left(\left(\int_{t_{j-1}}^{t_j}\|\partial_{tt} w_1(t)\|\,\mathrm{d}s\right)^2 + \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j}\|\partial_{tt} w_2(t)\|_{-1}\,\mathrm{d}s\right)^2\right) \\
\lesssim &\ k^2(\|f\|_2^2 + \|g\|_1^2).
\end{aligned} \tag{4.3.69}$$

注意到

$$\theta_1^0 = \mathbb{P}_h f - \mathcal{R}_h f = \mathbb{P}_h(I - \mathcal{R}_h)f, \quad \overline{\partial}\rho_1^j = \frac{1}{k}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(\mathcal{R}_h - I)\dot{w}_1(s)\mathrm{d}s.$$

最后由式(4.3.52)和式(4.3.37)得

$$\|\theta_1^0\|^2 \lesssim h^4\|f\|_2^2, \qquad \sum_{j=1}^n k\|\mathbb{P}_h\overline{\partial}\rho_1^j\|^2 \lesssim h^2(\|f\|_3^2 + \|g\|_2^2). \tag{4.3.70}$$

将上述估计带入式(4.3.66), 得

$$\|\theta_1^n\|^2 + \|A_h^{-\frac{1}{2}}\theta_2^n\|^2 \lesssim (h^4 + k^2)(\|f\|_3 + \|g\|_2)^2 + k\sum_{j=1}^n(\|\theta_1^j\|^2 + \|A_h^{-\frac{1}{2}}\theta_2^j\|^2),$$

再由三角不等式, 离散的Gronwall引理1.2.3, 式(4.3.40)和式(4.3.41), 即得式(4.3.49)的证明. 定理证毕. ¶

为了给出式(4.3.42)的误差估计, 需要导出离散算子$r(k\mathcal{A}_h)$的Green函数.

引理 4.3.4 设$\phi_h \in S_h^{\varrho(r)} \times S_h^{\varrho(r)}$是如下离散问题的解

$$\epsilon\mathcal{A}_h\phi_h + \phi_h = \mathbb{P}_h f, \epsilon > 0,\ f \in (L_2(\mathcal{D}))^2. \tag{4.3.71}$$

则存在一个函数$G_{h,\epsilon} \in C(\overline{\mathcal{D}\times\mathcal{D}})$, 使得

$$\phi_h(x) = \int_{\mathcal{D}} G_{h,\epsilon}(x, y)f\mathrm{d}y,\ \forall x \in \overline{\mathcal{D}}, \tag{4.3.72}$$

并且对于$x, y \in \overline{\mathcal{D}}$, $G_{h,\epsilon}(x, y) = G_{h,\epsilon}(y, x)$.

证明 这里只证明$A=-\Delta$和$A_h=\Delta_h$的情况. 设$\dim(S_h^1)=N_h$. 众周所知(参考文献[21]), 离散空间S_h^1存在一组正交基函数$\{\chi_j\}_{j=1}^{N_h}$, 使得$(\chi_i,\chi_j)=\delta_{ij}$和

$$A_h(\chi_i,\chi_j)=(\nabla\chi_i,\nabla\chi_j)=\lambda_{h,i}\delta_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots,N_h$$

成立, 其中$\{\lambda_{h,j}\}_{j=1}^{N_h}\in(0,\infty)$. 注意到$\{\lambda_{h,j},\chi_j\}_{j=1}^{N_h}$是离散算子$\Delta_h$的一组特征对序列, 并且特征向量构成$S_h^1$的一组正交基函数. 因为$\mathcal{A}_h=\begin{pmatrix}0 & I\\ -\Delta_h & 0\end{pmatrix}$, 方程(4.3.72)的具体形式为

$$\begin{pmatrix}\phi_h^1\\ \phi_h^2\end{pmatrix}=\epsilon\begin{pmatrix}0 & I\\ -\Delta_h & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_h^1\\ \phi_h^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbb{P}_hf_1\\ \mathbb{P}_hf_2\end{pmatrix},\tag{4.3.73}$$

或者

$$\begin{cases}\phi_h^1-\epsilon\phi_h^2=\mathbb{P}_hf_1,\\ \phi_h^2+\epsilon\Delta_h\phi_h^1=\mathbb{P}_hf_2.\end{cases}\tag{4.3.74}$$

下面寻找两个序列$\{\mu_j\}_{j=1}^{N_h}$和$\{\nu_j\}_{j=1}^{N_h}$, 使得

$$\phi_h^1=\sum_{j=1}^{N_h}\mu_j\chi_j,\qquad \phi_h^2=\sum_{j=1}^{N_h}\nu_j\chi_j.\tag{4.3.75}$$

将式(4.3.75)代入式(4.3.74), 然后两边分别乘以χ_j, 做内积得,

$$\begin{cases}\mu_j-\epsilon\nu_j=(\mathbb{P}_hf_1,\chi_j),\\ \nu_j+\epsilon\lambda_{h,j}\mu_j=(\mathbb{P}_hf_2,\chi_j),\end{cases}\quad j=1,2,\cdots,N_h.\tag{4.3.76}$$

此方程有唯一解

$$\mu_j=\frac{(\mathbb{P}_hf_1,\chi_j)+\epsilon(\mathbb{P}_hf_2,\chi_j)}{1+\epsilon^2\lambda_{h,j}},\tag{4.3.77}$$

$$\nu_j=\frac{(\mathbb{P}_hf_2,\chi_j)-\epsilon\lambda_{h,j}(\mathbb{P}_hf_1,\chi_j)}{1+\epsilon^2\lambda_{h,j}}.\tag{4.3.78}$$

将所得到的μ_j,ν_j, $j=1,2,\cdots N_h$代入式(4.3.74), 得

$$\begin{cases}\phi_h^1(x)=\int_{\mathcal{D}}G_{h,\epsilon}^1(x,y)f_1(y)\mathrm{d}y+\int_{\mathcal{D}}G_{h,\epsilon}^2(x,y)f_2(y)\mathrm{d}y,\\ \phi_h^2(x)=\int_{\mathcal{D}}G_{h,\epsilon}^3(x,y)f_1(y)\mathrm{d}y+\int_{\mathcal{D}}G_{h,\epsilon}^4(x,y)f_2(y)\mathrm{d}y,\end{cases}\tag{4.3.79}$$

其中

$$G_{h,\epsilon}^1(x,y)=\sum_{j=1}^{N_h}\frac{1}{1+\epsilon^2\lambda_{h,j}}\chi_j(x)\chi_j(y),\qquad G_{h,\epsilon}^2(x,y)=\sum_{j=1}^{N_h}\frac{\epsilon}{1+\epsilon^2\lambda_{h,j}}\chi_j(x)\chi_j(y),$$

$$G_{h,\epsilon}^3(x,y)=-\sum_{j=1}^{N_h}\frac{\epsilon\lambda_{h,j}}{1+\epsilon^2\lambda_{h,j}}\chi_j(x)\chi_j(y),\qquad G_{h,\epsilon}^4(x,y)=\sum_{j=1}^{N_h}\frac{1}{1+\epsilon^2\lambda_{h,j}}\chi_j(x)\chi_j(y).$$

最后由式(4.3.79), 方程(4.3.71)的解可以写成下列形式

$$\phi_h=\left(\phi_h^1,\phi_h^2\right)^{\mathrm{T}}=\int_{\mathcal{D}}G_{h,\epsilon}(x,y)f\mathrm{d}y,$$

其中

$$G_{h,\epsilon}(x,y)=\begin{pmatrix}G_{h,\epsilon}^1 & G_{h,\epsilon}^2\\ G_{h,\epsilon}^3 & G_{h,\epsilon}^4\end{pmatrix},$$

$G_{h,\epsilon}(x,y)$是离散算子$r(\epsilon\mathcal{A}_h)$的Green函数. 引理证毕. ¶

由以上准备工作, 就可以给出全离散格式(4.3.42)和式(4.3.28)之间的误差估计.

定理 4.3.4 设$U_h^n=[U_{h,1}^n,U_{h,2}^n]^{\mathrm{T}}$, $\widetilde{X}^n=[\widetilde{u}^n,\widetilde{v}^n]^{\mathrm{T}}$分别是方程(4.3.42)和式(4.3.28)的解, 则有

(1) 对于随机波方程, $\forall\gamma\in[0,\frac{1}{2})$,

$$\begin{aligned}&E\|\widetilde{u}^n-U_{h,1}^n\|^2+E\|\widetilde{v}^n-U_{h,2}^n\|_{-1}^2\\ \lesssim\ &(k^{\frac{2\gamma}{3}}+h^{\frac{4\gamma}{3}})(E\|u_0\|_\gamma^2+E\|v_0\|_{\gamma-1}^2+\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^{2-2\gamma}}).\end{aligned}\tag{4.3.80}$$

(2) 对于随机弹性方程, $\forall\gamma\in[0,\frac{3}{4})$,

$$\begin{aligned}&E\|\widetilde{u}^n-U_{h,1}^n\|^2+E\|\widetilde{v}^n-U_{h,2}^n\|_{-2}^2\\ \lesssim\ &(k^{\frac{2\gamma}{3}}+h^{\frac{8\gamma}{3}})(E\|u_0\|_\gamma^2+E\|v_0\|_{\gamma-2}^2+\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^{4-4\gamma}}).\end{aligned}\tag{4.3.81}$$

证明 这里只给出式(4.3.80)的证明. 采用类似的方法, 即可证明式(4.3.81). 注意到这时$A=-\Delta$, $A_h=\Delta_h$. 因为$S(t)$的Green函数为$G(t;x,y)$, 所以$S(t)[v]=\int_{\mathcal{D}}G(t;x,y)v(y)\mathrm{d}y$, 式(4.3.28)可表示为

$$\widetilde{X}^n\ \ =\ \ S(t_n)X_0+\int_0^{t_n}\int_{\mathcal{D}}\widetilde{G}_n(\tau;x,y)B\widehat{W}(\tau,y)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}y,\tag{4.3.82}$$

其中$\widetilde{G}_n(t;x,y)=\sum_{j=1}^n\mathcal{X}_{\Delta_j}(t)G(t_{n-j+1};x,y)$. 类似地, 式(4.3.42)可表示为

$$U_h^n(x)=S_{k,h}^n\mathbb{P}_hX_0+\int_0^{t_n}\int_{\mathcal{D}}\widehat{D}_{h,n}(\tau;x,y)B\widehat{W}(\tau,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau,\tag{4.3.83}$$

其中

$$\widehat{D}_{h,n}(t;x,y):=\sum_{j=1}^n\mathcal{X}_{\Delta_j}(t)G_{h,k}^{n-j+1}(x,y).\tag{4.3.84}$$

因此可以给出误差$\widetilde{X}^n - U_h^n$的表达式为

$$\begin{aligned}
\widetilde{X}^n - U_h^n &= (S(t_n) - S_{k,h}^n \mathbb{P}_h) X_0 + \\
&\quad \int_0^T \int_{\mathcal{D}} \mathcal{X}_{(0,t_n)}(\tau) \Big(\widetilde{G}_n(\tau; x, y) - \widehat{D}_{h,n}(\tau; x, y) \Big) B \widehat{W} \mathrm{d}\tau \mathrm{d}y \\
&= S_1 + S_2.
\end{aligned} \tag{4.3.85}$$

首先, 第一项容易得到

$$E|||S_1|||^2 \lesssim (k^{\frac{2\gamma}{3}} + h^{\frac{4\gamma}{3}})(E\|u_0\|_\gamma^2 + E\|v_0\|_{\gamma-1}^2). \tag{4.3.86}$$

对第二项取期望, 然后由引理4.3.1, 得

$$\begin{aligned}
&E|||\mathcal{S}_2|||^2 = E\Big|\Big|\Big| \int_0^T \int_{\mathcal{D}} \mathcal{X}_{(0,t_n)}(\tau) \Big(\widetilde{G}_n(\tau; x, y) - \widehat{D}_{h,n}(\tau; x, y) \Big) B \widehat{W} \mathrm{d}s \mathrm{d}y \Big|\Big|\Big|^2 \\
= \;& \int_{\mathcal{D}} \Big\{ \sum_{j\in\mathcal{N}} \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \frac{1}{k|K|} \Big(\int_{S_{j,K}} \mathcal{X}_{(0,t_n)}(\tau) P_1 \Big(\widetilde{G}_n(\tau; x, y) - \widehat{D}_{h,n}(\tau; x, y) \Big) B \mathrm{d}\tau \mathrm{d}y \Big)^2 \Big\} \mathrm{d}x + \\
& \int_{\mathcal{D}} \Big\{ \sum_{j\in\mathcal{N}} \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \frac{1}{k|K|} \Big(\int_{S_{j,K}} \mathcal{X}_{(0,t_n)}(\tau) A^{-\frac{1}{2}} \times \\
& P_2 \Big(\widetilde{G}_n(\tau; x, y) - \widehat{D}_{h,n}(\tau; x, y) \Big) B \mathrm{d}\tau \mathrm{d}y \Big)^2 \Big\} \mathrm{d}x \\
= \;& \int_{\mathcal{D}} \Big\{ \sum_{j=1}^n k \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \frac{1}{|K|} \Big(\int_K P_1 \Big(G(t_{n-j+1}; x, y) - G_{h,k}^{n-j+1}(x, y) \Big) B \mathrm{d}y \Big)^2 \Big\} \mathrm{d}x + \\
& \int_{\mathcal{D}} \Big\{ \sum_{j=1}^n k \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \frac{1}{|K|} \Big(\int_K A^{-\frac{1}{2}} P_2 \Big(G(t_{n-j+1}; x, y) - G_{h,k}^{n-j+1}(x, y) \Big) B \mathrm{d}y \Big)^2 \Big\} \mathrm{d}x \\
= \;& S_{21} + S_{22}.
\end{aligned}$$

设$\mathcal{X}_K(x)$是$K \in \mathcal{T}_h$的特征函数. 因为$G(t_j; x, y)$, $G_{h,k}^j(x, y)$分别是$S(t_j)$和$S_{k,h}^j \mathbb{P}_h$的Green函数,

$$\begin{aligned}
& P_1(S(t_j) - S_{k,h}^j \mathbb{P}_h) B \mathcal{X}_K(x) \\
= \;& \int_{\mathcal{D}} P_1 \Big(G(t_{n-j+1}; x, y) - G_{h,k}^{n-j+1}(x, y) \Big) B \mathcal{X}_K(y) \mathrm{d}y \\
= \;& \int_K P_1 \Big(G(t_{n-j+1}; x, y) - G_{h,k}^{n-j+1}(x, y) \Big) B \mathrm{d}y,
\end{aligned} \tag{4.3.87}$$

所以

$$\begin{aligned}
S_{21} &= \int_D \Big\{ \sum_{j=1}^n k \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \frac{1}{|K|} \Big(\int_K B_1 \Big(G(t_{n-j+1}; x, y) - G_{h,k}^{n-j+1}(x, y) \Big) B \mathrm{d}y \Big)^2 \Big\} \mathrm{d}x \\
&= \sum_{j=1}^n k \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \frac{1}{|K|} \int_{\mathcal{D}} \Big(P_1(S(t_{n-j+1}) - S_{k,h}^{n-j+1} \mathbb{P}_h) B \mathcal{X}_K(x) \Big)^2 \mathrm{d}x \\
&= \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \frac{1}{|K|} \sum_{j=1}^n k \| P_1(S(t_{n-j+1}) - S_{k,h}^{n-j+1} \mathbb{P}_h) B \mathcal{X}_K(x) \|^2.
\end{aligned} \tag{4.3.88}$$

类似地, 有

$$S_{22}=\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\frac{1}{|K|}\sum_{j=1}^{n}k\|A^{-\frac{1}{2}}P_2(S(t_{n-j+1})-S_{k,h}^{n-j+1}\mathbb{P}_h)B\mathcal{X}_K(x)\|^2. \tag{4.3.89}$$

由此估计与式(4.3.88)可得

$$E|||\mathcal{S}_2|||^2\leqslant\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\frac{1}{|K|}\sum_{j=1}^{n}k|||(S(t_{n-j+1})-S_{k,h}^{n-j+1}\mathbb{P}_h)B\mathcal{X}_K(x)|||^2. \tag{4.3.90}$$

注意到$0\leqslant\varepsilon_\alpha(x)\leqslant 1,\alpha\in\mathbb{N},x\in\mathcal{D}$和$B\mathcal{X}_K(x)=(0,\mathcal{X}_K(x))^{\mathrm{T}}$. 因为$\sum\limits_{\alpha=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^{2-2\gamma}}<\infty,\gamma\in[0,\frac{1}{2})$,

$$\begin{aligned}\|\mathcal{X}_K(x)\|_{\dot{H}^{\gamma-1}}^2&=\sum_{\alpha=1}^{\infty}\lambda_\alpha^{\gamma-1}\Big(\int_{\mathcal{D}}\mathcal{X}_K(x)\varepsilon_\alpha(x)\mathrm{d}x\Big)^2\\&=\sum_{\alpha=1}^{\infty}\lambda_\alpha^{\gamma-1}\Big(\int_K\varepsilon_\alpha(x)\mathrm{d}x\Big)^2\lesssim\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^{2-2\gamma}}|K|^2,\end{aligned}$$

所以, 在式(4.3.44)中取$f=0$和$g=\mathcal{X}_K(x)$可以得到

$$\begin{aligned}E|||S_2|||^2&\lesssim(h^{\frac{4\gamma}{3}}+k^{\frac{2\gamma}{3}})\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\frac{1}{|K|}\|\mathcal{X}_K(x)\|_{\dot{H}^{\gamma-1}}^2\\&\lesssim(h^{\frac{4\gamma}{3}}+k^{\frac{2\gamma}{3}})\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^{2-2\gamma}}.\end{aligned} \tag{4.3.91}$$

定理证毕. ¶

定理4.3.1中给出了式(4.3.2)和式(4.3.16)之间的误差估计; 定理4.3.2给出了式(4.3.16)和式(4.3.28)之间的误差估计; 定理4.3.4给出了式(4.3.28)和式(4.3.42)之间的误差估计. 将以上三种误差估计结合, 就可以得到全离散格式(4.3.42)与原方程(4.3.2)之间的如下误差估计.

定理 4.3.5 设$U_h^n=[U_{h,1}^n,U_{h,2}^n]^{\mathrm{T}}$, $X(t)=[u(t),v(t)]^{\mathrm{T}}$分别是方程(4.3.42)和方程(4.3.2)的解. 在定理4.3.1, 定理4.3.2和定理4.3.4成立的条件下, 有

(1) 对于随机波方程, $\forall\gamma\in[0,\frac{1}{2})$,

$$\begin{aligned}&E\|u(t_n)-U_{h,1}^n\|^2+E\|v(t_n)-U_{h,2}^n\|_{-1}^2\\\lesssim\;&(k^{\frac{2\gamma}{3}}+h^{\frac{4\gamma}{3}})(E\|u_0\|_\gamma^2+E\|v_0\|_{\gamma-1}^2+\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^{2-2\gamma}}).\end{aligned} \tag{4.3.92}$$

(2) 对于随机弹性方程, $\forall\gamma\in[0,\frac{3}{4})$,

$$\begin{aligned}&E\|u(t_n)-U_{h,1}^n\|^2+E\|v(t_n)-U_{h,2}^n\|_{-2}^2\\\lesssim\;&(k^{\frac{2\gamma}{3}}+h^{\frac{8\gamma}{3}})(E\|u_0\|_\gamma^2+E\|v_0\|_{\gamma-2}^2+\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^{4-4\gamma}}).\end{aligned} \tag{4.3.93}$$

证明 此结论可以由定理4.3.1, 定理4.3.2和定理4.3.4直接得到. ¶

4.4 研究进展评述

本节对随机双曲方程的理论与有限元方法研究进展做一简单的介绍. 随机双曲方程理论研究工作主要有文献[3, 56–60]等, 随机双曲方程有限元方法的研究工作主要有文献[34, 55, 61–63]等.

(1) S. Peszat, J. Zabczyk[58]研究了$\mathbb{R}^d$上随机波动方程

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2}u(t) = \Delta u + f(u) + g(u)\dot{W},\ t \in (0,T),\ x \in \mathbb{R}^d, \\ u(0,x) = u_0(x),\ \frac{\partial}{\partial t}u(0,x) = v_0(x), \end{cases} \tag{4.4.1}$$

解的存在性.

(2) 在文献[57]中, 根据协方差内核噪声, P. Szymon研究了在任意维数空间下非线性抛物方程解存在的充分必要条件, 同时也研究了$d = 1, 2, 3$维空间下的非线性随机波方程

$$\begin{cases} \mathrm{d}\dot{u}(t) = [\Delta u + f(u)]\mathrm{d}t + g(u)\mathrm{d}W,\ t \in (0,T),\ x \in \mathbb{R}^d, \\ u(0,x) = u_0(x), \dot{u}(0,x) = v_0(x), \end{cases} \tag{4.4.2}$$

解存在的条件.

(3) H. Schurz[59]研究了一类$\mathbb{R}^2$上带有Q-规则可加噪声的随机波方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sigma^2 Au + B(u) + G(u)\dot{W},$$

其中非线性项B是以立方非线性增长的. 作者利用特征函数的方法研究了问题解的存在性、唯一性、连续性和稳定性.

(4) A. Millet和P.L. Morien[60]研究了一类平面上的随机波动方程

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - \Delta u(t,x) = \sigma(u(t,x))\dot{W}(t,x) + b(u(t,x)), \quad (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^2, \\ u(0,x) = u_0(x), \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = v_0(x). \end{cases}$$

作者基于Malliavin微积分证明了方程解的存在性与解的Hölder规则性.

(5) 与随机波动方程在形式上比较相似的是随机弹性方程,

$$m(x)\frac{\partial^2}{\partial t^2}X(t) = \Delta(a(t,x)\Delta)X + G(X(t))\dot{W}(t). \tag{4.4.3}$$

利用I. Lasiecka在文献[64]中讨论确定性方程时使用的偏微分方程方法, J.U. Kim[56]研究了随机弹性方程的初值边值问题, 分析了方程(4.4.3)弱解的存在性和唯一性.

(6) 关于随机波方程和随机弹性方程弱解存在的问题可以参考文献[3]. 在文献[3]中, 为了研究随机双曲方程弱解的存在性, G.D. Prato引进了新的变量$v = \dot{u}$, 将方程化成了抽象发展方程的形式, 再利用算子半群理论研究了解的存在性和唯一性.

(7) Z. Brzezniak, B. Maslowski和J. Seidler在文献[65]中研究了Hilbert空间上的抽象随机弹性梁方程

$$u_{tt}+A^2u+g(u_{,t})+m(\|B^{\frac{1}{2}}u\|^2)Bu=\sigma(u,u_t)\dot{W},$$

其中A,B是正自伴算子, W是一个无穷维Wiener过程. 作者应用Lyapunov函数方法得到了方程适度解的存在性和渐进稳定性.

(8) P.L. Chow在文献[66]中研究了随机非线性波动方程(4.4.1), 其中的非线性是多项式增长的. 作者得到了方程解的存在唯一性. P.L. Chow, J.L. Menaldi在[67]中研究了弹性板的非线性振荡抽象出来的随机弹性分方程(4.4.3), 得到了解的存在唯一性.

(9) 随机双曲方程有限元方法的成果主要有文献[34, 55, 61]. 在文献[61]中, M. Kov$\acute{a}$c等研究了线性随机波方程

$$\begin{cases} \mathrm{d}\dot{u}(t)-\Delta u(t)\mathrm{d}t=\mathrm{d}W(t), & (t,x)\in[0,T]\times\mathcal{D} \\ u(t)=0, & x\in\partial\mathcal{D}, \\ u(\cdot,0)=u_0,\dot{u}(\cdot,0)=v_0 & x\in\mathcal{D}, \end{cases} \tag{4.4.4}$$

的半离散有限元方法, 得到了有限元误差估计.

(10) L. Quer-Sardanyons和M. Sanz-Sole[68]研究了一类一维随机波方程

$$u_{tt}-u_{xx}=f(t,x,u)+\sigma(t,x,u)\frac{\partial^2 W}{\partial t\partial x}(t,x)$$

的空间半离散格式. 作者在非线性项f和σ至多线性增长的条件下, 利用截断Green函数的方法得到了问题的空间半离散格式和格式的收敛阶.

(11) J. Walsh[69]研究了一类一维随机波方程初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t,u)+g(x,t,u)\dot{W}, & x\in\mathbb{R},t>0, \\ u(x,0)=u_0(x),\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=v_0(x), & x\in\mathbb{R} \end{cases} \tag{4.4.5}$$

的数值解. 作者构造了一个数值格式, 并且证明了格式在L^p中的收敛阶是最优的.

(12) E. Hausenblas[62]研究了一类随机波动方程

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)+f(u(t,x))+\dot{W}(t,x), & x\in[0,1],t\in[0,T], \\ u(x,0)=u_0(x),\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=v_0(x), & x\in[0,1], \\ u(t,0)=u(t,1)=0, & t\in[0,T] \end{cases} \tag{4.4.6}$$

的弱收敛. 通过对波动方程的积分解进行离散, 作者构造了一个数值格式, 证明了格式的弱收敛阶.

(13) 在文献[55]中, D. Cohen引进了三角函数方法研究随机波动方程(4.4.4), 得到了误差估计

$$\|U_1^n-u(t_n)\|_{L_2(\omega;\dot{H}^0)}\leqslant C(h^{2\beta/3}+k^{\min\{\beta,1\}})\|(-\Delta)^{(\beta-1)/2}Q^{\frac{1}{2}}\|_{\mathrm{HS}}, \tag{4.4.7}$$

并且能量范数的期望值随着时间线性增长, 即

$$
\begin{aligned}
& E(\|(-\Delta_h)^{\frac{1}{2}}U_1^n\|^2_{L_2(\mathcal{D})}+\|U_2^n\|^2_{L_2(D)}) \\
= \quad & E(\|(-\Delta_h)^{\frac{1}{2}}U_1^n\|^2_{L_2(D)}+\|U_2^n\|^2_{L_2(\mathcal{D})})+t_n\mathrm{Tr}(P_hQP_h).
\end{aligned} \tag{4.4.8}
$$

(14) R. Qi, X. Yang[70]研究了带有可加噪声的随机弹性方程

$$
\mathrm{d}\dot{u}+Au\mathrm{d}t=\mathrm{d}W, \quad t\in(0,T) \tag{4.4.9}
$$

的全离散有限元方法. 作者将双曲类方程(4.4.9)表示成一阶方程组的形式, 然后基于确定性弹性方程的有限元误差估计, 得到了随机弹性方程(4.4.9)的有限元全离散格式的强误差估计.

(15) R. Qi, X. Yang[71]研究了一类随机弹性方程

$$
\begin{cases}
\ddot{u}+\Delta^2u=\dot{W}, & (t,x)\in(0,T)\times\mathcal{D}, \\
u=\Delta u=0, & (t,x)\in(0,T)\times\partial\mathcal{D}, \\
u(\cdot,0)=u_0, \dot{u}(\cdot,0)=\upsilon_0, & x\in\mathcal{D}
\end{cases} \tag{4.4.10}
$$

的有限元半离散格式和全离散格式的弱收敛, 作者得到在时间方向和空间方向弱收敛的阶都是强收敛的两倍.

第5章　随机椭圆型方程有限元方法

椭圆型方程具有广泛的应用背景, 在研究稳定状态的问题时通常会导出椭圆型方程, 譬如静电学中的电势以及牛顿万有引力理论中的引力势满足Laplace方程或Poisson方程, 不可压缩粘性流体的定常流动满足定常Stokes方程. 本章将以随机Poisson方程和随机Stokes方程为例研究椭圆型随机偏微分方程的有限元理论分析方法.

对于随机Poisson方程, 基于Laplace方程Dirichlet边值问题的Green函数, 将其转化为关于Green函数的随机积分的形式, 研究其积分解的存在性、唯一性和正则性. 首先通过对噪声项的分片常数逼近, 构造原方程的正则化方程, 对正则化随机方程进行有限元研究. 然后利用Green函数的性质分别给出随机Poisson方程与正则化方程之间的误差估计以及正则化方程有限元误差估计的理论分析.

对于随机Stokes方程, 根据Stokes方程Green函数给出其弱解表达式, 研究其弱解正则性. 通过对噪声项分片常数逼近将方程正则化, 研究正则化随机方程的非协调有限元格式的收敛性. 利用对偶方法给出非协调有限元格式速度在L^2范数和压力在H^{-1}范数下的有限元误差估计分析方法.

5.1　椭圆方程的Green函数

Green函数在求解偏微分方程边值问题和初边值问题中有着重要的作用, 它仅与微分算子, 边界条件的形式和区域有关, 一旦求得相应的Green函数, 就可以通过叠加原理给出非齐次问题的解. Green函数在椭圆型随机偏微分方程有限元误差估计中也有着重要的地位, 因此本节介绍线性方程的基本解理论, 进一步通过Green公式引入椭圆方程Green函数的定义. 本节内容主要选自文献[72].

设$\mathbb{R}$上可积函数列$\{f_j(x)\}$, 满足

$$\lim_{j\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_j(x)\phi(x)\mathrm{d}x=\phi(x_0),\quad \forall\phi\in C_0^{\infty}(\mathbb{R}).$$

由广义函数收敛性定义1.2.2, 函数列$\{f_j(x)\}$在广义函数$\mathfrak{D}'(\mathbb{R})$中存在极限, 记为$\delta(x-x_0)$, 于是$\delta$函数对应着$C_0^{\infty}(\mathbb{R})$上的一个线性连续泛函.

注 5.1.1 可认为$\delta(x-x_0)$是定义在$\mathbb{R}^1$上的函数, 满足

$$\delta(x-x_0)=\begin{cases}0, & x\neq x_0,\\ \infty, & x=x_0,\end{cases}\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-x_0)\mathrm{d}x=1.$$

$\delta(x-x_0)$在ϕ上的作用形式上可以表示成

$$<\delta(x-x_0),\phi(x)>=\int_{\mathbb{R}}\delta(x-x_0)\phi(x)\mathrm{d}x=\phi(x_0),\quad \forall\phi\in C_0^{\infty}(\mathbb{R}).$$

由广义导数的定义1.2.2知, δ函数的广义导数为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(x)\delta^{(n)}(x-x_0)\mathrm{d}x=(-1)^n\phi^{(n)}(x_0),\quad \forall\phi\in C_0^{\infty}(\mathbb{R}),$$

$$\delta(x-x_0)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}H(x-x_0),$$

其中$H(x-x_0)$是Heaviside函数

$$H(x-x_0)=\begin{cases}0, & x<x_0,\\ 1, & x\geqslant x_0.\end{cases}$$

高维空间$\mathbb{R}^n$中的δ函数定义为

$$\delta(x-x_0)=\delta(x_1-x_1^0)\delta(x_2-x_2^0)\cdots\delta(x_n-x_n^0),$$

其中$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),x_0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$. 高维$\delta$函数与一维$\delta$函数有类似的性质, 例如

$$\int_{\mathbb{R}^n}\delta(x-x_0)f(x)\mathrm{d}V_x=f(x_0).$$

考虑位势方程边值问题

$$\begin{cases}-\Delta u(x)=f(x), & x\in\Omega\subset\mathbb{R}^3,\\ u|_{\partial\Omega}=0.\end{cases}\tag{5.1.1}$$

称函数u是方程(5.1.1)的广义解, 如果对任意的函数$\phi\in C_0^{\infty}(\Omega)$, 函数$u$满足积分方程

$$\int_{\Omega}u(x)(-\Delta\phi(x))\mathrm{d}x=\int_{\Omega}f(x)\phi(x)\mathrm{d}x.$$

算子$-\Delta$的第一边值问题在区域Ω上的Green函数定义为定解问题

$$\begin{cases}-\Delta u(x)=\delta(x-x_0), & x,x_0\in\Omega,\\ u|_{\partial\Omega}=0\end{cases}\tag{5.1.2}$$

的广义解, 记做$u=G(x_0,x)$. 根据δ函数的性质, G满足关系

$$-\int_{\Omega}G(x_0,x)\Delta\phi(x)\mathrm{d}x=\int_{\Omega}\delta(x-x_0)\phi(x)\mathrm{d}x=\phi(x_0),\forall\phi\in C_0^{\infty}(\Omega).$$

考虑Poisson方程第一边值问题

$$\begin{cases}-\Delta u(x)=f(x), & x\in\Omega,\\ u(x)=\varphi(x), & x\in\partial\Omega.\end{cases}\tag{5.1.3}$$

设u为定解问题(5.1.3)的解, 令$v(x)=G(x_0,x)$, 形式地代入Green公式(1.2.17), 得

$$\int_\Omega u(-\Delta G)+G(-f)\mathrm{d}x=\oint_{\partial\Omega}-u\frac{\partial G}{\partial\nu}\mathrm{d}s.$$

由广义函数δ的定义,

$$\int_\Omega u(-\Delta G)\mathrm{d}x=\int_\Omega u(x)\delta(x-x_0)\mathrm{d}x=u(x_0),$$

故有

$$u(x_0)=\int_\Omega G(x_0,x)f(x)\mathrm{d}x-\oint_{\partial\Omega}\varphi(x)\frac{\partial G(x_0,x)}{\partial\nu}\mathrm{d}s. \tag{5.1.4}$$

由此, 若定解问题(5.1.3)的解$u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega})$, 则它可由Green函数$G(x_0,x)$, 非齐次项$f$和边值$\varphi$表示出来.

Green函数$G(x_0,x)$可以分解为奇性部分$\Gamma(x_0,x)$和正则部分$g(x_0,x)$, 即

$$G(x_0,x)=\Gamma(x_0,x)+g(x_0,x),$$

其中$\Gamma(x_0,x)$在整个空间$\mathbb{R}^n(n=2$ 或 $3)$上满足方程

$$-\Delta\Gamma(x_0,x)=\delta(x-x_0),$$

称为Laplace方程的基本解, $g(x_0,x)$满足边值问题

$$\begin{cases}-\Delta g(x_0,x)=0, & x,x_0\in\Omega,\\ g(x)=-\Gamma(x), & x\in\partial\Omega.\end{cases}$$

可以求得(详见文献[72]), 当$n=3$时,

$$\Gamma(x_0,x)=\frac{1}{4\pi\sqrt{(x_1-x_1^0)^2+(x_2-x_2^0)^2+(x_3-x_3^0)^2}}, \tag{5.1.5}$$

其中$x=(x_1,x_2,x_3),x_0=(x_1^0,x_2^0,x_3^0)$, 于是Green函数

$$G(x_0,x)=\frac{1}{4\pi\sqrt{(x_1-x_1^0)^2+(x_2-x_2^0)^2+(x_3-x_3^0)^2}}+g(x_0,x).$$

当$n=2$时, 二维Laplace方程的基本解为

$$\Gamma(x_0,x)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\sqrt{(x_1-x_1^2)^2+(x_2-x_2^0)^2}}. \tag{5.1.6}$$

下面考虑Poisson方程第二边值问题

$$\begin{cases}-\Delta u(x)=f(x), & x\in\Omega,\\ \frac{\partial u(x)}{\partial\nu}=\varphi(x), & x\in\partial\Omega.\end{cases} \tag{5.1.7}$$

称满足边值问题

$$\begin{cases} -\Delta G(x_0,x)=\delta(x-x_0)-c, & x_0,x\in\Omega, \\ \frac{\partial G(x_0,x)}{\partial \nu}=0, & x\in\partial\Omega \end{cases} \tag{5.1.8}$$

的广义解$G(x_0,x)$为Laplace算子第二边值问题在区域Ω上的Green函数, 其中$c=\frac{1}{|\Omega|}$为常数.

第二边值问题的Green函数也可分解为两部分

$$G(x_0,x)=\Gamma(x_0,x)+g(x_0,x),$$

其中奇性部分$\Gamma(x_0,x)$是Laplace方程的基本解, $g(x_0,x)$满足定解问题

$$\begin{cases} \Delta g(x_0,x)=c, & x_0,x\in\Omega, \\ \frac{\partial g(x_0,x)}{\partial \nu}=-\frac{\partial \Gamma(x_0,x)}{\partial \nu}, & x\in\partial\Omega. \end{cases}$$

如果相容性条件

$$\int_\Omega f(x)\mathrm{d}x=-\oint_{\partial\Omega}\varphi(x)\mathrm{d}s$$

成立, 类似于第一边值问题的情况, 式(5.1.7)的解可表示为

$$u(x_0)=\int_\Omega G(x_0,x)f(x)\mathrm{d}x+\oint_{\partial\Omega}G(x_0,x)\varphi(x)\mathrm{d}s+c^*,$$

其中$c^*=\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(x)\mathrm{d}x$是一个常数.

5.2 随机椭圆方程有限元方法

本节考虑平面区域上半线性椭圆随机偏微分方程齐次Dirichlet问题的有限元方法. 首先对噪声项进行分片常数逼近, 构造原问题的逼近问题, 研究二者之间误差, 然后研究逼近问题的有限元误差估计, 最后将两种误差结合, 即得原问题的有限元误差估计. 本节内容主要选自文献[73].

设$\Omega\subset\mathbb{R}^2$是平面上凸多项式区域, 本节考虑的问题是半线性随机椭圆偏微分方程边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u(x)+f(u(x))=g(x)+\dot{W}(x), & x\in\Omega, \\ u(x)=0, & x\in\partial\Omega, \end{cases} \tag{5.2.1}$$

其中$\dot{W}$是白噪声项, $g\in L^2(\Omega)$, f是$\overline{\Omega}$上的连续函数并且$f(0)=0$. 对于非线性项f, 假设以下条件成立.

假设 5.2.1 令γ表示Poincarè不等式中的正常数, 即

$$\|\nabla v\|^2\geqslant\gamma\|v\|^2,\forall v\in H_0^1(\Omega). \tag{5.2.2}$$

(1) 存在常数$\alpha < \gamma$, 使得

$$(f(s) - f(t))(s - t) \geqslant -\alpha|s - t|^2, \forall s, t \in \mathbb{R}. \tag{5.2.3}$$

(2) 存在正常数β_1, β_2, 使得

$$|f(s) - f(t)| \leqslant \beta_1 + \beta_2|s - t|, \forall s, t \in \mathbb{R}. \tag{5.2.4}$$

注 5.2.1 假设5.2.1是有意义的, 即满足这两个条件的函数集合非空. 事实上, 当f是一个Lipschitz常数小于γ的Lipschitz连续函数与一个非减有界函数的和时, 假设5.2.1中的两个条件都满足.

5.2.1 方程的正则化

这一小节用$\dot{W}$的分片常数近似$\dot{W}_h$代替$\dot{W}$, 构造式(5.2.1)的逼近问题, 建立逼近问题解的正则性并研究逼近问题与原问题之间的误差估计.

令$\{\mathcal{T}_h\}$表示$\overline{\Omega}$的三角形剖分族, $h \in (0, 1)$是剖分尺度. 进一步假设剖分族$\{\mathcal{T}_h\}$是拟一致的, 即存在正常数ρ_1, ρ_2, 使得

$$\rho_1 h \leqslant R_T^{\mathrm{inr}} < R_T^{\mathrm{cir}} \leqslant \rho_2 h, \forall T \in \mathcal{T}_h, \forall 0 < h < 1, \tag{5.2.5}$$

其中, R_T^{inr}和R_T^{cir}分别为单元T内切圆和外接圆的半径. 对任意三角形单元$T \in \mathcal{T}_h$, 记$|T|$为单元T的面积, 定义

$$\xi_T = \frac{1}{\sqrt{|T|}} \int_T 1 \mathrm{d}W(x), \tag{5.2.6}$$

则$\{\xi_T\}_{T \in \mathcal{T}_h}$是一族独立同分布正态随机变量, 服从$\mathcal{N}(0, 1)$分布. 噪声项$\dot{W}(x)$的分片常数逼近定义为

$$\dot{W}_h(x) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |T|^{-\frac{1}{2}} \xi_T \chi_T(x), \tag{5.2.7}$$

其中χ_T是T上的特征函数. 由上述定义, $\dot{W}_h \in L^2(\Omega)$是几乎必然成立的. 然而, 以下引理表明, 当$h \downarrow 0$时, $\|\dot{W}_h\|$是无界的.

引理 5.2.1 *存在与h无关的正常数C_1, C_2, 使得*

$$C_1 h^{-2} \leqslant E\|\dot{W}_h\|^2 \leqslant C_2 h^{-2}. \tag{5.2.8}$$

证明 根据$\dot{W}_h$的定义, 有

$$E\|\dot{W}_h\|^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} 1 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |T| \frac{1}{|T|}.$$

由拟一致剖分条件式(5.2.5), $4\pi\rho_1^2 h^2 \leqslant |T| \leqslant 4\pi\rho_2^2 h^2, \forall T \in \mathcal{T}_h$. 因此

$$E\|\dot{W}_h\|^2 \geqslant \frac{1}{4\pi\rho_2^2} h^{-2} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |T| = \frac{|\Omega|}{4\pi\rho_2^2} h^{-2},$$

$$E\|\dot{W}_h\|^2 \quad \leqslant \quad \frac{1}{4\pi\rho_1^2}h^{-2}\sum_{T\in\mathcal{T}_h}|T| = \frac{|\Omega|}{4\pi\rho_1^2}h^{-2}.$$

所以令$C_1 = \frac{|\Omega|}{4\pi\rho_2^2}, C_2 = \frac{|\Omega|}{4\pi\rho_1^2}$即得引理证明. ¶

在式(5.2.1)中用$\dot{W}_h$代替$\dot{W}$, 得如下逼近问题

$$\begin{cases} -\Delta u_h(x) + f(u_h(x)) = g(x) + \dot{W}_h(x), & x\in\Omega, \\ u_h(x) = 0, & x\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{5.2.9}$$

定义$H_0^1(\Omega)$上双线性型$a(\cdot,\cdot)$,

$$a(\phi,\psi) = (\nabla\phi,\nabla\psi) + (f(\phi),\psi), \tag{5.2.10}$$

则问题(5.2.9)的变分形式为: 求$u_h\in H_0^1(\Omega)$, 使得

$$a(u_h,v) = (F_h,v), \forall v\in H_0^1(\Omega), \tag{5.2.11}$$

其中$F_h = g + \dot{W}_h$.

在证明u_h的收敛性之前, 首先需要解决u_h的存在性问题, 即变分问题(5.2.11)解的存在唯一性. 如下定理给出了变分问题(5.2.11)解的存在唯一性以及解的上界估计.

定理 5.2.1 如果假设5.2.1成立, 则变分问题(5.2.11)存在唯一解$u_h\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$, 并且

$$E\|u_h\|_2^2 \leqslant C_2h^{-2}, \tag{5.2.12}$$

其中C_2是一个与h无关的正常数.

证明 解$u_h\in H_0^1(\Omega)$的存在唯一性由假设5.2.1直接可得, 接下来只需证明$u_h\in H^2(\Omega)$和式(5.2.12)成立. 由条件(5.2.3)和Poincaré不等式(5.2.2), 有

$$a(\phi,\phi) \geqslant \|\nabla\phi\|^2 - \alpha\|\phi\|^2 \geqslant \frac{\gamma-\alpha}{1+\gamma}\|\phi\|_1^2, \quad \forall\phi\in H_0^1(\Omega).$$

因此, 在式(5.2.11)中令$v = u_h$, 得

$$\|u_h\|_1^2 \leqslant \frac{1+\gamma}{\gamma-\alpha}a(u_h,u_h) = \frac{1+\gamma}{\gamma-\alpha}(F_h,u_h) \leqslant \frac{1+\gamma}{\gamma-\alpha}\|F_h\|\|u_h\|,$$

即

$$\|u_h\|_1 \leqslant \frac{1+\gamma}{\gamma-\alpha}\|F_h\|.$$

令$R_h = -f(u_h) + F_h$, 则由式(5.2.4)得

$$\|R_h\|^2 \leqslant 3\left(\beta_1^2|\Omega| + \left(\frac{\beta_2^2(1+\gamma)^2}{(\gamma-\alpha)^2} + 1\right)\|F_h\|^2\right). \tag{5.2.13}$$

注意到u_h是边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u_h(x) = R_h(x), & x\in\Omega, \\ u_h(x) = 0, & x\in\partial\Omega, \end{cases} \tag{5.2.14}$$

的唯一弱解, 则由R_h的正则性质式(5.2.13)可得, $u_h \in H^2(\Omega)$, 并且有

$$\|u_h\|_2^2 \leqslant \rho_3 \|R_h\|^2,$$

其中ρ_3是一个仅与Ω有关的正常数. 由上式和引理5.2.1以及式(5.2.13), 即可得定理证明. ¶

下面估计式(5.2.1)的解u与其逼近解u_h之间的误差. 注意到二维Laplace方程Dirichlet齐次边值问题的Green函数为

$$G(x,y) = \Gamma(x,y) + V(x,y), \tag{5.2.15}$$

其中$\Gamma(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\log|x-y|$在$\mathbb{R}^2 \setminus \{y\}$上满足$\Delta_x \Gamma(x,y) = 0$, $V(x,y)$满足

$$\begin{cases} -\Delta_x V(x,y) = 0, & x \in \Omega, \\ V(x,y) = -\Gamma(x,y), & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.2.16}$$

是关于x和y的Lipschitz连续函数. 则u和u_h分别为如下Hammerstein型积分方程的唯一解,

$$u + Kf(u) = Kg + K\dot{W}, \tag{5.2.17}$$

$$u_h + Kf(u_h) = Kg + K\dot{W}_h, \tag{5.2.18}$$

其中

$$K\phi(x) = \int_\Omega G(x,y)\phi(y)\mathrm{d}y. \tag{5.2.19}$$

由Poincaré不等式(5.2.2), 可得

$$(K\phi, \phi) \geqslant \gamma \|K\phi\|^2, \forall \phi \in L^2(\Omega). \tag{5.2.20}$$

正则化问题(5.2.9)与原问题(5.2.1)之间的误差估计, 以及正则化问题(5.2.9)的有限元误差估计都需要用到Green函数G的正则性, 这个性质由如下引理给出.

引理 5.2.2 *存在与$\epsilon \in (0,1)$无关的正常数ρ_4, 使得*

$$\int_\Omega |G(x,y) - G(x,z)|^2 \mathrm{d}x \leqslant \rho_4 \epsilon^{-1} |y-z|^{2-\epsilon}, \forall y, z \in \Omega. \tag{5.2.21}$$

证明 只需证明式(5.2.21)关于G的奇异部分成立. 对于$\epsilon \in (0,1)$, 有

$$\begin{aligned} & \int_\Omega (\log|x-y| - \log|x-z|)^2 \mathrm{d}x \\ = & \int_\Omega (|x-y| - |x-z|)^{2-\epsilon} \left|\log|x-y| - \log|x-z|\right|^\epsilon \times \\ & \left(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\theta}{\theta|x-y| + (1-\theta)|x-z|}\right)^{2-\epsilon} \mathrm{d}x \\ \leqslant & |y-z|^{2-\epsilon} \int_\Omega \left|\log|x-y| - \log|x-z|\right|^\epsilon \times \\ & \left(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\theta}{\theta|x-y| + (1-\theta)|x-z|}\right)^{2-\epsilon} \mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$\leqslant \quad |y-z|^{2-\epsilon}\int_{\Omega}|\log|x-y|-\log|x-z||^{\epsilon}\left(\frac{1}{|x-y|}+\frac{1}{|x-z|}\right)^{2-\epsilon}\mathrm{d}x.$$

令$p=\frac{3}{\epsilon}, q=\frac{3}{3-\epsilon}$, 应用Hölder不等式得

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega}(\log|x-y|-\log|x-z|)^2\mathrm{d}x\\
\leqslant\ & |y-z|^{2-\epsilon}\left(\int_{\Omega}|\log|x-y|-\log|x-z||^3\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{\epsilon}{3}}\times\\
&\left(\int_{\Omega}\left(\frac{1}{|x-y|}+\frac{1}{|x-z|}\right)^{\frac{3(2-\epsilon)}{3-\epsilon}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{3-\epsilon}{3}}.
\end{aligned}$$

令$H=\sup_{x,y\in\Omega}|x-y|$, 则有

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega}|\log|x-y|-\log|x-z||^3\,\mathrm{d}x\\
\leqslant\ & 2\int_{\Omega}\left(|\log|x-y||^3+|\log|x-z||^3\right)\mathrm{d}x\\
\leqslant\ & 4\int_{|x-y|\leqslant H}|\log|x-y||^3\,\mathrm{d}x=8\pi\int_0^H r\,|\log(r)|^3\,\mathrm{d}r,
\end{aligned}$$

又有

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega}\left(\frac{1}{|x-y|}+\frac{1}{|x-z|}\right)^{\frac{3(2-\epsilon)}{3-\epsilon}}\mathrm{d}x\\
\leqslant\ & 2^{\frac{3(2-\epsilon)}{3-\epsilon}}\int_{|x-y|\leqslant H}\frac{1}{|x-y|^{\frac{3(2-\epsilon)}{3-\epsilon}}}\mathrm{d}x\\
\leqslant\ & 8\pi\int_0^H r^{-\frac{3-2\epsilon}{3-\epsilon}}\,\mathrm{d}r=8\pi\frac{3-\epsilon}{\epsilon}H^{\frac{\epsilon}{3-\epsilon}}\\
\leqslant\ & 24\pi\epsilon^{-1}H^{\frac{\epsilon}{3-\epsilon}}.
\end{aligned}$$

综合以上不等式, 就可得到式(5.2.21)的证明. ¶

有限元离散过程是在正则化问题(5.2.9)上进行的, 为了得到原问题(5.2.1)与有限元离散格式之间的误差估计, 下面先给出式(5.2.1)的解u与式(5.2.9)的解u_h之间的误差.

定理 5.2.2 令u和u_h分别为半线性随机椭圆问题(5.2.1)和逼近问题(5.2.9)的解. 如果f满足假设5.2.1, 则存在正常数C_3, C_4, 使得

$$E\|u-u_h\|^2\leqslant C_3\beta_1\sqrt{\log(h)}h+C_4|\log(h)|h^2. \tag{5.2.22}$$

证明 从式(5.2.17)减去式(5.2.18), 得到

$$u-u_h+K(f(u)-f(u_h))=E_h, \tag{5.2.23}$$

其中, $E_h=K\dot{W}-K\dot{W}_h$.

首先证明存在与h无关的正常数C_5, 使得

$$E\|E_h\|^2 \leqslant C_5|\log(h)|h^2. \tag{5.2.24}$$

事实上, 由Itô等距式(1.5.40),

$$\begin{aligned}
& E\|K\dot{W}-K\dot{W}_h\|^2 \\
= \; & E\left(\int_\Omega\left(\int_\Omega G(x,y)\mathrm{d}W(y)-\int_\Omega G(x,y)\mathrm{d}W_h(y)\right)^2\mathrm{d}x\right) \\
= \; & E\left(\int_\Omega\left(\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\int_T G(x,y)\mathrm{d}W(y)\; -\right.\right. \\
& \left.\left.|T|^{-1}\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\int_T G(x,z)\mathrm{d}z\int_T 1\mathrm{d}W(y)\right)^2\mathrm{d}x\right) \\
= \; & E\left(\int_\Omega\left(\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\int_T\int_T|T|^{-1}(G(x,y)-G(x,z))\mathrm{d}z\mathrm{d}W(y)\right)^2\mathrm{d}x\right) \\
= \; & \int_\Omega\left(\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\int_T\left(|T|^{-1}\int_T(G(x,y)-G(x,z))\mathrm{d}z\right)^2\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

由引理5.2.2, 得

$$\begin{aligned}
& E\|K\dot{W}-K\dot{W}_h\|^2 \\
\leqslant \; & \int_\Omega\left(\sum_{T\in\mathcal{T}_h}|T|^{-1}\int_T\int_T(G(x,y)-G(x,z))^2\mathrm{d}z\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\
= \; & \sum_{T\in\mathcal{T}_h}|T|^{-1}\int_T\int_T\int_\Omega(G(x,y)-G(x,z))^2\mathrm{d}x\mathrm{d}z\mathrm{d}y \\
\leqslant \; & \sum_{T\in\mathcal{T}_h}|T|^{-1}\int_T\int_T\rho_4\epsilon^{-1}|y-z|^{2-\epsilon}\mathrm{d}z\mathrm{d}y \\
\leqslant \; & \rho_4|\Omega|\epsilon^{-1}h^{2-\epsilon}.
\end{aligned}$$

令$\epsilon=\frac{1}{|\log(h)|}, C_5=\rho_4|\Omega|$, 即可得到式(5.2.24)的证明.

在式(5.2.23)两边同时乘以$f(u)-f(u_h)$, 在Ω上积分, 得

$$(u-u_h,f(u)-f(u_h))+(K(f(u)-f(u_h)),f(u)-f(u_h))=(E_h,f(u)-f(u_h)).$$

因此, 由假设5.2.1和式(5.2.20), 得

$$-\alpha\|u-u_h\|^2+\gamma\|K(f(u)-f(u_h))\|^2 \leqslant \|E_h\|\|f(u)-f(u_h)\|. \tag{5.2.25}$$

由式(5.2.23), 又有

$$\|K(f(u)-f(u_h))\|^2 \quad = \quad \|u-u_h-E_h\|^2$$

$$\geqslant \quad \frac{\alpha+\gamma}{2\gamma}\|u-u_h\|^2-\frac{3\gamma-\alpha}{\gamma-\alpha}\|E_h\|^2, \tag{5.2.26}$$

这里用到了$\epsilon=\frac{\alpha+\gamma}{2\gamma}$时的不等式

$$\|\phi+\psi\|^2\geqslant\epsilon\|\phi\|^2-\frac{2-\epsilon}{1-\epsilon}\|\psi\|^2,\forall 0<\epsilon<1,\phi,\psi\in L^2(\Omega).$$

由假设5.2.1, 又可得到

$$\|f(u)-f(u_h)\|\leqslant\beta_1|\Omega|^{\frac{1}{2}}+\beta_2\|u-u_h\|.$$

因此

$$\begin{aligned}&\|E_h\|\|f(u)-f(u_h)\|\\ \leqslant\ &\beta_1|\Omega|^{\frac{1}{2}}\|E_h\|+\beta_2\|u-u_h\|\|E_h\|\\ \leqslant\ &\beta_1|\Omega|^{\frac{1}{2}}\|E_h\|+\frac{\gamma-\alpha}{4}\|u-u_h\|^2+\frac{\beta_2^2}{\gamma-\alpha}\|E_h\|^2.\end{aligned} \tag{5.2.27}$$

综合式(5.2.25), 式(5.2.26)和式(5.2.27), 得

$$\|u-u_h\|^2\leqslant C_6\beta_1\|E_h\|+C_7\|E_h\|^2,$$

其中C_6,C_7是与h无关的正常数. 由以上不等式和式(5.2.23)即可得到式(5.2.22)的证明. ¶

5.2.2 有限元误差估计

这一小节建立变分问题(5.2.11)的有限元逼近并研究其误差估计.

令$V_h\subset H_0^1(\Omega)$是关于剖分$\mathcal{T}_h$的有限元子空间, 则式(5.2.9)的有限元方法为: 求$U_h\in V_h$, 使得

$$(\nabla U_h,\nabla v)+(f(U_h),v)=(g+\dot{W}_h,v),\forall v\in V_h. \tag{5.2.28}$$

类似于定理5.2.1, 下面先解决U_h的存在性问题, 即变分问题(5.2.28)解的存在唯一性. 如下定理给出了变分问题(5.2.28)解的存在唯一性以及解的上界估计.

定理 5.2.3 *如果f满足假设5.2.1, 则逼近变分问题(5.2.28)存在唯一解U_h, 并且存在正常数C_8, 使得*

$$E\|U_h\|_1^2\leqslant C_8h^{-2}. \tag{5.2.29}$$

证明 这个定理的证明与定理5.2.1的证明类似, 所以这里省略. ¶

为了估计误差u_h-U_h, 引入Galerkin投影算子$P_h:H_0^1(\Omega)\to V_h$, 定义为

$$(\Delta P_hw,\Delta v)=(\Delta w,\Delta v),\forall v\in V_h,w\in H_0^1(\Omega).$$

由插值误差估计定理1.4.6和Ceá引理知, 投影算子P_h有估计(详见文献[6])

$$\|w-P_hw\|+h\|\Delta(w-P_hw)\|\leqslant\rho_5h^2\|w\|_2,\forall w\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega), \tag{5.2.30}$$

其中ρ_5是一个与h无关的正常数.

通过以上准备工作, 下面给出有限元离散问题(5.2.28)的解U_h与原问题(5.2.1)的解u之间的误差估计.

定理 5.2.4 如果f满足假设5.2.1, 则存在正常数C_9, 使得

$$E\|u-U_h\|^2 \leqslant C_9\sqrt{|\log(h)|}h. \tag{5.2.31}$$

证明 由投影算子P_h的定义和式(5.2.28)可得,

$$(\Delta(P_h u_h - U_h), \Delta(P_h u_h - U_h)) + (f(u_h) - f(U_h), P_h u_h - U_h) = 0.$$

因此, 由假设5.2.1, 有

$$\begin{aligned}
& \|\Delta(P_h u_h - U_h)\|^2 \\
= \ & -(f(u_h) - f(U_h), u_h - U_h) + (f(u_h) - f(U_h), u_h - P_h u_h) \\
\leqslant \ & \alpha\|u_h - U_h\|^2 + \|\beta_1 + \beta_2|u_h - U_h|\|\|u_h - P_h u_h\| \\
\leqslant \ & \alpha\|u_h - U_h\|^2 + \beta_1|\Omega|^{\frac{1}{2}}\|u_h - P_h u_h\| + \beta_2\|u_h - U_h\|\|u_h - P_h u_h\| \\
\leqslant \ & \frac{\gamma+\alpha}{2}\|u_h - U_h\|^2 + \beta_1|\Omega|^{\frac{1}{2}}\|u_h - P_h u_h\| + \frac{\beta_2^2}{2(\gamma-\alpha)}\|u_h - P_h u_h\|^2.
\end{aligned}$$

由Poincaré不等式(5.2.2), 有

$$\begin{aligned}
& \gamma\|u_h - U_h\|^2 \leqslant \gamma\|u_h - P_h u_h\|^2 + \gamma\|P_h u_h - U_h\|^2 \\
\leqslant \ & \gamma\|u_h - P_h u_h\|^2 + \|\Delta(P_h u_h - U_h)\|^2 \\
\leqslant \ & \frac{\gamma+\alpha}{2}\|u_h - U_h\|^2 + \beta_1|\Omega|^{\frac{1}{2}}\|u_h - P_h u_h\| + \left(\gamma + \frac{\beta_2^2}{2(\gamma-\alpha)}\right)\|u_h - P_h u_h\|^2.
\end{aligned}$$

因此由投影算子误差估计式(5.2.30), 得

$$\|u_h - U_h\|^2 \leqslant C_{10}(\beta_1 h^2\|u_h\|_2 + h^4\|u_h\|_2^2),$$

其中C_{10}是与h无关的正常数. 由定理5.2.1得到

$$\begin{aligned}
& E\|u_h - U_h\|^2 \leqslant C_{10}\left(\beta_1 h^2 E\|u_h\|_2 + h^4 E\|u_h\|_2^2\right) \\
\leqslant \ & C_{10}\left(\beta_1 h^2 (E\|u_h\|_2^2)^{\frac{1}{2}} + h^4 E\|u_h\|_2^2\right) \leqslant C_{10}\left(\beta_1 C_1^{\frac{1}{2}} h + C_1^2 h^2\right).
\end{aligned} \tag{5.2.32}$$

因此由上式和定理5.2.2即得

$$E\|u-U_h\|^2 \leqslant C_5\beta_1\sqrt{|\log(h)|}h + C_6|\log(h)|h^2 + C_{10}\left(\beta_1 C_1^{\frac{1}{2}} h + C_1^2 h^2\right). \tag{5.2.33}$$

定理得证. ¶

注 5.2.2 可以证明$E\|u_h\|_1^2 \leqslant C_8 h^{-2}$, 因此$u_h$和其有限元逼近$U_h$的界有相同阶$O(h^{-2})$. 由式(5.2.32)知, 尽管$u_h$和$U_h$在$H_0^1(\Omega)$中是无界的, 误差$u_h - U_h$的期望在$L^2(\Omega)$中仍然有正的收敛阶.

定理5.2.4中需要f满足假设5.2.1中的条件, 而Lipschitz连续是比假设5.2.1更强的条件, 所以当非线性项f是Lipschitz连续函数时, 有更强的误差估计.

定理 5.2.5 如果f是Lipschitz连续的, 并且其Lipschitz常数L小于γ, 则存在与h无关的正常数C_{11}, 使得

$$E\|u-U_h\|^2 \leqslant C_{11}|\log(h)|h^2. \tag{5.2.34}$$

证明 在这种情况下, 假设5.2.1中的$\beta_1=0, \beta_2=\alpha=L$. 因此由式(5.2.33), 定理得证. ¶

5.3 随机Stokes方程非协调有限元方法

本节研究随机Stokes方程的非协调有限元方法. 通过对Stokes方程Green函数性质的分析和噪声项的分片常数逼近, 得到随机Stokes方程的非协调有限元格式并研究其收敛速度.

5.3.1 随机Stokes方程Green函数的性质

这一小节根据Stokes方程Green函数给出随机Stokes方程弱解表达式, 并研究Stokes方程Green函数的性质.

设$\mathcal{D}\subset\mathbb{R}^d(d=2或3)$是凸多边形区域, $(\Omega,\mathcal{F},P)$是一个概率空间. 考虑下列随机Stokes方程: 求随机函数$(u,p):\mathcal{D}\to\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}$, 使得

$$\begin{cases} -\Delta u(x)+\nabla p(x)=f+\dot{W}(x), & x\in\mathcal{D}, \\ \mathrm{div}u(x)=0, & x\in\mathcal{D}, \\ u(x)=0, & x\in\partial\mathcal{D}, \end{cases} \tag{5.3.1}$$

其中$f\in L^2(\mathcal{D})$, $\dot{W}=(\dot{W}^1,\cdots,\dot{W}^d)$是一个$d$维白噪声, 满足

$$E(\dot{W}^j(x)\dot{W}^j(x'))=\delta(x-x'), \qquad x,\ x'\in\mathcal{D}, j=1,\cdots d,$$

其中δ表示Dirac函数.

对于随机Stokes方程(5.3.1), (u,p)称为弱意义下的解, 如果对于$\forall v\in C_b^2(\mathcal{D})\cap C(\overline{\mathcal{D}})$且满足$v|_{\partial\mathcal{D}}=0$, (u,p)满足方程

$$-(u,\Delta v)-(p,\mathrm{div}v)=(f,v)+\int_{\mathcal{D}} vW(\mathrm{d}x), \tag{5.3.2}$$

其中$(\cdot,\cdot)$和$\|\cdot\|_{L^2}$分别为空间$L^2(\mathcal{D})$上内积和范数.

设Stokes方程关于u和p的Green函数分别为G, H. 则$G=(G_{ij})_{d\times d}, H=(H_j)_{1\times d}$有如下形式(详见文献[74]): 当$d=2$时,

$$G_{ij}(x,y)=-\frac{1}{4\pi}\delta_{ij}\ln\frac{1}{|x-y|}+\frac{(x_i-y_i)(x_j-y_j)}{|x-y|^2}+g_{ij}^1(x,y),\ i,j=1,2, \tag{5.3.3}$$

$$H_j(x,y)=\frac{\partial}{\partial x_j}D_j(x,y),\ D_j(x,y)=-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x-y|}+h_j^1(x,y),\ j=1,2, \tag{5.3.4}$$

当$d=3$时,

$$G_{ij}(x,y)=-\frac{1}{8\pi}\delta_{ij}\frac{1}{|x-y|}+\frac{(x_i-y_i)(x_j-y_j)}{|x-y|^3}+g_{ij}^2(x,y), i,j=1,2,3, \quad (5.3.5)$$

$$H_j(x,y)=\frac{\partial}{\partial x_j}D_j(x,y),\ D_j(x,y)=\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-y|}+h_j^2(x,y),\ j=1,2,3, \quad (5.3.6)$$

其中g_{ij}^k, h_j^k是$\overline{\mathcal{D}}$上分片可微函数. 由Green函数定义Stokes方程(5.3.1)的积分解

$$u(x)=\int_{\mathcal{D}}G(x,y)f(y)\mathrm{d}y+\int_{\mathcal{D}}G(x,y)\mathrm{d}W(y), \quad (5.3.7)$$

$$p(x)=\int_{\mathcal{D}}H(x,y)f(y)\mathrm{d}y+\mathrm{div}\int_{\mathcal{D}}D(x,y)\mathrm{d}W(y), \quad (5.3.8)$$

其中的随机积分是Itô意义下的随机积分. 可以证明, 随机Stokes方程(5.3.1)的弱解式(5.3.2)与积分解式(5.3.7) $\sim$ (5.3.8)是等价的[74].

为了研究噪声项的分片常数逼近所产生的误差, 需要Stokes方程Green函数的如下性质.

引理 5.3.1 当$d=2$时,

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{D}}|G(x,y)-G(x,z)|^2\mathrm{d}x &\leqslant C\,|\ln|y-z||\,|y-z|^2, && (5.3.9)\\ \int_{\mathcal{D}}|D(x,y)-D(x,z)|^2\mathrm{d}x &\leqslant C\,|\ln|y-z||\,|y-z|^2, && (5.3.10)\end{aligned}$$

当$d=3$时,

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{D}}|G(x,y)-G(x,z)|^2\mathrm{d}x &\leqslant C|y-z|, && (5.3.11)\\ \int_{\mathcal{D}}|D(x,y)-D(x,z)|^2\mathrm{d}x &\leqslant C|y-z|, && (5.3.12)\end{aligned}$$

其中C是一个正常数, $|y-z|$充分小.

证明 这里只对G的性质式(5.3.9)和式(5.3.11)进行证明, 式(5.3.10)和式(5.3.12)的证明过程类似. 易证不等式

$$\int_{\mathcal{D}}(\ln|x-y|-\ln|x-z|)^2\mathrm{d}x\leqslant C|(\ln|y-z|)||y-z|^2. \quad (5.3.13)$$

因此为证式(5.3.9), 只需证明对任意的$i,j=1,2$, 成立

$$\int_{\mathcal{D}}\left|\frac{(x_i-y_i)(x_j-y_j)}{|x-y|^2}-\frac{(x_i-z_i)(x_j-z_j)}{|x-z|^2}\right|^2\mathrm{d}x\leqslant C|(\ln|y-z|)||y-z|^2. \quad (5.3.14)$$

下面证明$i=1,j=2$的情况, 其他几种情况的证明是相似的, 这里不做赘述.

令$S(v)=\{x:|x-v|\leqslant|y-z|\}, \mathcal{D}_1=\mathcal{D}\setminus(S(y)\cup S(z))$. 因为式(5.3.14)的积分是一个有界函数, 所以只需证明不等式(5.3.14)左端的积分对$\mathcal{D}_1$成立即可. 对此有,

$$\int_{\mathcal{D}_1}\left(\frac{(x_1-y_1)(x_2-y_2)}{|x-y|^2}-\frac{(x_1-z_1)(x_2-z_2)}{|x-z|^2}\right)^2\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\mathcal{D}_1}\left(\frac{(x_1-y_1)(x_2-y_2)|x-z|^2-(x_1-z_1)(x_2-z_2)|x-y|^2}{|x-y|^2|x-z|^2}\right)^2\mathrm{d}x \\
&\leqslant 2\int_{\mathcal{D}_1}\left(\frac{|x-z|^2((x_1-y_1)(x_2-y_2)-(x_1-z_1)(x_2-z_2))}{|x-y|^2|x-z|^2}\right)^2\mathrm{d}x+ \\
&\quad 2\int_{\mathcal{D}_1}\left(\frac{(|x-z|^2-|x-y|^2)(x_1-z_1)(x_2-z_2)}{|x-y|^2|x-z|^2}\right)^2\mathrm{d}x =: I_1+I_2.
\end{aligned}
$$

对于I_1, 有

$$
\begin{aligned}
I_1 &= 2\int_{\mathcal{D}_1}\left(\frac{(x_1-y_1)(x_2-y_2)-(x_1-z_1)(x_2-z_2)}{|x-y|^2}\right)^2\mathrm{d}x \\
&= 2\int_{\mathcal{D}_1}\left(\frac{(x_2-z_2)(y_1-z_1)+(x_1-y_1)(y_2-z_2)}{|x-y|^2}\right)^2\mathrm{d}x \\
&\leqslant 2|y-z|^2\int_{\mathcal{D}_1}\left(\frac{|x-z|^2+|x-y|^2}{|x-y|^4}\right)^2\mathrm{d}x \\
&\leqslant 2|y-z|^2\int_{\mathcal{D}_1}\left(\frac{2|y-z|^2}{|x-y|^4}+\frac{3}{|x-y|^2}\right)^2\mathrm{d}x \\
&= 4|y-z|^2\int_{\mathcal{D}_1}\frac{1}{|x-y|^4}\mathrm{d}x+6|y-z|^2\int_{\mathcal{D}}\frac{1}{|x-y|^2}\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

因为$\mathcal{D}$是有界的, 存在常数R使得$|x|\leqslant R, \forall x\in\mathcal{D}$. 因此

$$
\begin{aligned}
I_1 &\leqslant 8\pi|y-z|^4\int_{|y-z|}^{2R}\frac{1}{r^3}\mathrm{d}r+12\pi|y-z|^2\int_{|y-z|}^{2R}\frac{1}{r}\mathrm{d}r \\
&\leqslant C\left(|y-z|^2+|y-z|^2\left|\ln|y-z|\right|\right).
\end{aligned}
$$

用同样的方法可以得到I_2的估计如下,

$$
I_2\leqslant C\left(|y-z|^2+|y-z|^2\left|\ln|y-z|\right|\right).
$$

这就证明了式(5.3.14), 从而式(5.3.9)得证.

为证式(5.3.11), 类似于式(5.3.9)的证明过程, 只需证明对任意的$i,j=1,2,3$, 成立

$$
\int_{\mathcal{D}}\left|\frac{(x_i-y_i)(x_j-y_j)}{|x-y|^3}-\frac{(x_i-z_i)(x_j-z_j)}{|x-z|^3}\right|^2\mathrm{d}x\leqslant C|y-z|, \tag{5.3.15}
$$

和

$$
\int_{\mathcal{D}}\left|\frac{1}{|x-y|}-\frac{1}{|x-z|}\right|^2\mathrm{d}x\leqslant C|y-z|. \tag{5.3.16}
$$

首先证明式(5.3.15)中$i=1, j=2$这一种情况, 其他几种情况的证明过程是类似的. 令$S(v)=\{x:|x-v|\leqslant|y-z|\}, \mathcal{D}_1=\mathcal{D}\setminus(S(y)\cup S(z))$. 下面分别估计式(5.3.15)左端在$S(y)\cup S(z)$和$\mathcal{D}_1$上的积分. 注意到

$$
\int_{S(y)\cup S(z)}\left(\frac{(x_1-y_1)(x_2-y_2)}{|x-y|^3}\right)^2\mathrm{d}x \quad\leqslant\quad \int_{S(y)\cup S(z)}\left(\frac{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}{|x-y|^3}\right)^2\mathrm{d}x
$$

$$\leqslant \int_{S(y)\cup S(z)} \frac{1}{|x-y|^2}\mathrm{d}x.$$

应用球面坐标变换, 得到

$$\int_{S(y)} \frac{1}{|x-y|^2}\mathrm{d}x = \int_0^{|y-z|}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{r^2\sin\phi}{r^2}\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r = 4\pi|y-z|.$$

另一方面又有

$$\begin{aligned}\int_{(S(y)\cup S(z))\setminus S(y)} \frac{1}{|x-y|^2}\mathrm{d}x &\leqslant \int_{(S(y)\cup S(z))\setminus S(y)} \frac{1}{|x-z|^2}\mathrm{d}x\\ &\leqslant \int_{S(z)} \frac{1}{|x-z|^2}\mathrm{d}x = 4\pi|y-z|.\end{aligned}$$

这就证明了

$$\int_{S(y)\cup S(z)} \left(\frac{(x_1-y_1)(x_2-y_2)}{|x-y|^3}\right)^2\mathrm{d}x \leqslant 8\pi|y-z|.$$

同理又可得到

$$\int_{S(y)\cup S(z)} \left(\frac{(x_1-z_1)(x_2-z_2)}{|x-z|^3}\right)^2\mathrm{d}x \leqslant 8\pi|y-z|.$$

因此

$$\begin{aligned}&\int_{S(y)\cup S(z)} \left(\frac{(x_1-y_1)(x_2-y_2)}{|x-y|^3}-\frac{(x_1-z_1)(x_2-z_2)}{|x-z|^3}\right)^2\mathrm{d}x\\ \leqslant\ & 2\int_{S(y)\cup S(z)} \left(\left[\frac{(x_1-y_1)(x_2-y_2)}{|x-y|^3}\right]^2+\left[\frac{(x_1-z_1)(x_2-z_2)}{|x-z|^3}\right]^2\right)\mathrm{d}x\\ \leqslant\ & 16\pi|y-z|.\end{aligned}$$

对于式(5.3.15)左端在$\mathcal{D}_1$上的积分, 有

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{D}_1} \left(\frac{(x_1-y_1)(x_2-y_2)}{|x-y|^3}-\frac{(x_1-z_1)(x_2-z_2)}{|x-z|^3}\right)^2\mathrm{d}x\\ =\ & \int_{\mathcal{D}_1} \left(\frac{(x_1-y_1)(x_2-y_2)|x-z|^3-(x_1-z_1)(x_2-z_2)|x-y|^3}{|x-y|^3|x-z|^3}\right)^2\mathrm{d}x\\ \leqslant\ & 2\int_{\mathcal{D}_1} \left(\frac{|x-z|^3((x_1-y_1)(x_2-y_2)-(x_1-z_1)(x_2-z_2))}{|x-y|^3|x-z|^3}\right)^2\mathrm{d}x+\\ & 2\int_{\mathcal{D}_1} \left(\frac{(|x-z|^3-|x-y|^3)(x_1-z_1)(x_2-z_2)}{|x-y|^3|x-z|^3}\right)^2\mathrm{d}x\\ =:\ & J_1+J_2.\end{aligned}$$

对于J_1, 有

$$\begin{aligned}J_1 &= 2\int_{\mathcal{D}_1} \left(\frac{(x_1-y_1)(x_2-y_2)-(x_1-z_1)(x_2-z_2)}{|x-y|^3}\right)^2\mathrm{d}x\\ &= 2\int_{\mathcal{D}_1} \left(\frac{(x_2-z_2)(y_1-z_1)-(x_1-y_1)(y_2-z_2)}{|x-y|^3}\right)^2\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant\ 2|y-z|^2\int_{\mathcal{D}_1}\left(\frac{|x-z|^2+|x-y|^2}{|x-y|^6}\right)\mathrm{d}x\\
&\leqslant\ 2|y-z|^2\int_{\mathcal{D}_1}\left(\frac{2|y-z|^2}{|x-y|^6}+\frac{3}{|x-y|^4}\right)\mathrm{d}x\\
&=\ 4|y-z|^4\int_{\mathcal{D}_1}\frac{1}{|x-y|^6}\mathrm{d}x+6|y-z|^2\int_{\mathcal{D}_1}\frac{1}{|x-y|^4}\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

因为$\mathcal{D}$是有界的, 存在常数R使得$|x|\leqslant R, \forall x\in\mathcal{D}$. 因此

$$
J_1\leqslant 16\pi|y-z|^4\int_{|y-z|}^{2R}\frac{1}{r^4}\mathrm{d}r+24\pi|y-z|^2\int_{|y-z|}^{2R}\frac{1}{r^2}\mathrm{d}r\leqslant C|y-z|.
$$

用同样的方法可证

$$
J_2\leqslant C|y-z|.
$$

结合J_1和J_2的估计即得式(5.3.15)的证明.

下证式(5.3.16). 由Hölder不等式, 有

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathcal{D}_1}\left(\frac{1}{|x-y|}-\frac{1}{|x-z|}\right)^2\mathrm{d}x\ &\leqslant\ \int_{\mathcal{D}_1}\frac{|y-z|^2}{|x-y|^2|x-z|^2}\mathrm{d}x\\
&\leqslant\ \frac{|y-z|^2}{2}\int_{\mathcal{D}_1}\left(\frac{1}{|x-y|^4}+\frac{1}{|x-z|^4}\right)\mathrm{d}x\\
&\leqslant\ |y-z|^2\int_{|y-z|}^{R}\frac{1}{r^2}\mathrm{d}r\leqslant C|y-z|.
\end{aligned}
$$

类似于式(5.3.15)的证明, 又有

$$
\int_{S(y)\cup S(z)}\left(\frac{1}{|x-y|}-\frac{1}{|x-z|}\right)^2\mathrm{d}x\leqslant\int_{S(y)\cup S(z)}\left(\frac{1}{|x-y|^2}-\frac{1}{|x-z|^2}\right)\mathrm{d}x\leqslant 16\pi|y-z|.
$$

这就证明了式(5.3.16), 从而式(5.3.11)得证. ¶

5.3.2 白噪声的正则化

本节首先对白噪声进行分片常数离散, 然后对随机Stokes方程进行正则化处理.

设$\mathcal{T}_h$是区域$\overline{\mathcal{D}}$的一个正则剖分, 其中h是剖分$\mathcal{T}_h$的直径. 对于二维区域, $T\in\mathcal{T}_h$是三角单元, 对于三维区域, $T\in\mathcal{T}_h$是四面体. 设$\mathcal{E}_h$表示二维剖分网格中所有单元的边或者三维网格中所有单元的面, $\mathcal{E}_h(T)$表示单元T所有的边(面). 对于$E\in\mathcal{E}_h$, 令$T_E=\bigcup_{E\in\mathcal{E}_h(T')}T'$表示与$E$相邻单元的集合. 设$\mathcal{T}_h$是拟一致剖分, 即存在常数$\rho_1$和$\rho_2$, 使得

$$
\rho_1 h\leqslant R_T^{\mathrm{inr}}<R_T^{\mathrm{cir}}\leqslant\rho_2 h,\ \forall\, T\in\mathcal{T}_h,\ \forall\, 0<h<1, \tag{5.3.17}
$$

其中R_T^{inr}和R_T^{cir}分别是单元T内切圆和外接圆半径. 对$T\in\mathcal{T}_h$, 记

$$
\xi_T^j=\frac{1}{\sqrt{|T|}}\int_T 1\mathrm{d}W^j(x),\ j=1,\cdots,d,
$$

其中$|T|$表示单元T的测度, 则$\{\xi_T^j\}_{T\in\mathcal{T}_h}$是一族独立同分布的正态随机变量且服从$\mathcal{N}(0,1)$分布.$\dot{W}^j(x)$的分片常数逼近为

$$\dot{\overline{W}}_h^j(x) = \sum_{T\in\mathcal{T}_h} |T|^{-\frac{1}{2}}\xi_T^j\chi_T(x), \tag{5.3.18}$$

其中χ_T是T的特征函数. 根据定义式(5.3.18), $\dot{\overline{W}}_h = (\dot{\overline{W}}_h^1,\cdots,\dot{\overline{W}}_h^d) \in L^2(\mathcal{D})$几乎处处成立. 注意当$h\to 0$时, $\|\dot{\overline{W}}_h\|$是无界的. 对于每个属于$L^2(\mathcal{D})$的函数$f:\mathcal{D}\times\Omega\to\mathbb{R}^d$, 可以定义积分

$$\int_{\mathcal{D}} f(x)\overline{W}_h(\mathrm{d}x) := \int_{\mathcal{D}} f(x)\dot{\overline{W}}_h(x)\mathrm{d}x. \tag{5.3.19}$$

噪声项的分片常数逼近$\dot{\overline{W}}_h$有许多重要的性质是$\dot{W}_h$所不具备的, 这些性质由如下引理给出.

引理 5.3.2 设$\|W_h\|^2 = \|W_h^1\|^2+\cdots+\|W_h^d\|^2$. 对于每个$\omega\in\Omega$, 有

(1) $\dot{\overline{W}}_h(\omega,\cdot)\in L^2(\mathcal{D})$;

(2) $E\left(\sum_{j=1}^d\left|\int_{\mathcal{D}}\overline{W}_h^j(\mathrm{d}x)\right|^2\right) = d|\mathcal{D}|$;

(3) $h^{-d}\lesssim E(\|\dot{\overline{W}}_h(\cdot)\|^2)\lesssim h^{-d}$;

(4) $E(|\int_{\mathcal{D}} g(x)\overline{W}_h(\mathrm{d}x)|^2)\leqslant\|g\|^2$, 其中$g\in L^2(\mathcal{D})$是确定函数.

证明 对于每个固定的$\omega\in\Omega$, 由$\dot{\overline{W}}_h^j(\omega,\cdot)$是一个分片常数函数, 所以$\dot{\overline{W}}_h^j(\omega,\cdot)\in L^2(\mathcal{D})$. 由式(5.3.19), 有

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{j=1}^d\left|\int_{\mathcal{D}}\overline{W}_h^j(\mathrm{d}x)\right|^2\right) &= \sum_{j=1}^d E\left(\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\int_T|T|^{-\frac{1}{2}}\xi_T^j\mathrm{d}x\right)^2 = \sum_{j=1}^d E\left(\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\int_T W^j(\mathrm{d}x)\right)^2 \\ &= d\int_{\mathcal{D}} 1\mathrm{d}x = d|\mathcal{D}|. \end{aligned}$$

类似地有

$$\begin{aligned} E(\|\dot{\overline{W}}_h(\cdot)\|^2) &= \sum_{j=1}^d\sum_{T,T'\in\mathcal{T}_h}|T|^{-\frac{1}{2}}|T'|^{-\frac{1}{2}}E\left(\int_{\mathcal{D}}\xi_T^j\xi_{T'}^j\chi_T(x)\chi_{T'}(x)\mathrm{d}x\right) \\ &= \sum_{j=1}^d\sum_{T\in\mathcal{T}_h}E(\xi_T^j\xi_T^j) = \sum_{j=1}^d\sum_{T\in\mathcal{T}_h}1 = \sum_{j=1}^d\sum_{T\in\mathcal{T}_h}|T|\frac{1}{|T|}. \end{aligned}$$

因此

$$h^{-d}\lesssim E(\|\dot{\overline{W}}_h(\cdot)\|^2)\lesssim h^{-d}.$$

对于(4), 由式(5.3.19)和Hölder不等式直接可得

$$E\left(\left|\int_{\mathcal{D}} g(x)\overline{W}_h(\mathrm{d}x)\right|^2\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= E\Big(\Big|\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\int_T g(x)\dot{\overline{W}}_h(x)\mathrm{d}x\Big|^2\Big)= E\Big(\Big|\sum_{T\in\mathcal{T}_h}|T|^{-\frac{1}{2}}\int_T g(x)\mathrm{d}x\xi_T\Big|^2\Big)\\
&= \sum_{T,T'\in\mathcal{T}_h}|T|^{-\frac{1}{2}}|T'|^{-\frac{1}{2}}\sum_{i,j}\int_T g_i(x)\mathrm{d}x\int_{T'}g_j(x)\mathrm{d}xE(\xi_T^i\xi_{T'}^j)\\
&= \sum_{T\in\mathcal{T}_h}|T|^{-1}\sum_{i=1}^{d}(\int_T g_i(x)\mathrm{d}x)^2E((\xi_T^i)^2)\\
&\leqslant \sum_{T\in\mathcal{T}_h}\int_T g(x)^2\mathrm{d}xE(\xi_T^2)\leqslant\|g\|^2,
\end{aligned}
$$

这里用到了结论: 如果集合$A,B\in\mathcal{B}(\mathcal{D})$且$A\cap B=\emptyset$, 则随机变量$W(A)$和$W(B)$是相互独立的. 引理证毕. ¶

下面考虑正则化随机Stokes方程

$$
\begin{cases}
-\Delta u_h(x)+\nabla p_h(x)=f(x)+\dot{\overline{W}}_h(x), & x\in\mathcal{D},\\
\mathrm{div}u_h(x)=0, & x\in\mathcal{D},\\
u_h(x)=0, & x\in\partial\mathcal{D}.
\end{cases}
\tag{5.3.20}
$$

类似于式(5.3.1), 方程(5.3.20)的弱解可以写成下列形式

$$
u_h(x)=\int_{\mathcal{D}}G(x,y)f(y)\mathrm{d}y+\int_{\mathcal{D}}G(x,y)\overline{W}_h(\mathrm{d}y), \tag{5.3.21}
$$

$$
p_h(x)=\int_{\mathcal{D}}H(x,y)f(y)\mathrm{d}y+\mathrm{div}\int_{\mathcal{D}}D(x,y)\overline{W}_h(\mathrm{d}y). \tag{5.3.22}
$$

下面给出$u-u_h$和$p-p_h$的估计, 即随机Stokes方程正则化问题(5.3.20)与原方程(5.3.1)之间的误差估计.

定理 5.3.1 设(u,p)和(u_h,p_h)分别是方程(5.3.1)和方程(5.3.20)的弱解, 则有估计

(1) 对于$d=2$,

$$
E(\|u-u_h\|^2+\|p-p_h\|_{-1}^2)\lesssim|\ln h|h^2.
$$

(2) 对于$d=3$,

$$
E(\|u-u_h\|^2+\|p-p_h\|_{-1}^2)\lesssim h.
$$

证明 只需证明$d=2$的情况, $d=3$时的证明过程类似. 由Itô等距式(1.5.40)和Hölder不等式, 有

$$
\begin{aligned}
&E\|u-u_h\|^2\\
&= E\left(\int_{\mathcal{D}}\left|\int_{\mathcal{D}}G(x,y)\mathrm{d}W(y)-\int_{\mathcal{D}}G(x,y)\mathrm{d}\overline{W}_h(y)\right|^2\mathrm{d}x\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= E\left(\int_{\mathcal{D}}\left|\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\int_T G(x,y)\mathrm{d}W(y)-|T|^{-1}\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\int_T G(x,z)\mathrm{d}z\int_T 1\mathrm{d}\overline{W}_h(y)\right|^2\mathrm{d}x\right)\\
&= E\left(\int_{\mathcal{D}}\left|\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\int_T\int_T |T|^{-1}(G(x,y)-G(x,z))\mathrm{d}z\mathrm{d}W(y)\right|^2\mathrm{d}x\right)\\
&= \int_{\mathcal{D}}\left(\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\int_T\left||T|^{-1}\int_T(G(x,y)-G(x,z))\mathrm{d}z\right|^2\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

由Green函数G的正则性(5.3.10), 得

$$
\begin{aligned}
& E\|u-u_h\|^2\\
\leqslant\ & \int_{\mathcal{D}}\left(\sum_{T\in\mathcal{T}_h}|T|^{-1}\int_T\int_T|G(x,y)-G(x,z)|^2\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.\\
=\ & \sum_{T\in\mathcal{T}_h}|T|^{-1}\int_T\int_T\int_{\mathcal{D}}|G(x,y)-G(x,z)|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z\mathrm{d}y\\
\leqslant\ & \sum_{T\in\mathcal{T}_h}|T|^{-1}\int_T\int_T C\,|\ln|y-z||\,|y-z|^2\mathrm{d}z\mathrm{d}y\\
\leqslant\ & C|\mathcal{D}||\ln h|h^2.
\end{aligned}
$$

下面估计$E\|p-p_h\|_{-1}^2$. 令$\phi\in H_0^1(\mathcal{D})$, 应用分部积分公式, 有

$$
\begin{aligned}
(p-p_h,\phi)^2 &= \left(\int_{\mathcal{D}}\left(\int_{\mathcal{D}}D(x,y)\mathrm{d}W(y)-\int_{\mathcal{D}}D(x,y)\mathrm{d}\overline{W}_h(y)\right)\Delta\phi(x)\mathrm{d}x\right)^2\\
&\leqslant \int_{\mathcal{D}}\left|\int_{\mathcal{D}}D(x,y)\mathrm{d}W(y)-\int_{\mathcal{D}}D(x,y)\mathrm{d}\overline{W}_h(y)\right|^2\mathrm{d}x\|\phi\|_1^2.
\end{aligned}
$$

因此

$$
\|p-p_h\|_{-1}^2\leqslant\left(\int_{\mathcal{D}}\left|\int_{\mathcal{D}}D(x,y)\mathrm{d}W(y)-\int_{\mathcal{D}}D(x,y)\mathrm{d}\overline{W}_h(y)\right|^2\mathrm{d}x\right).
$$

与$E\|u-u_h\|$的估计过程类似, 可以得到

$$
E\|p-p_h\|_{-1}^2\leqslant C|\ln h|h^2.
$$

定理得证. ¶

5.3.3 非协调有限元逼近

本节研究方程(5.3.20)的非协调有限元方法. 设$X:=H_0^1(\mathcal{D})$和$Q:=L_0^2(\mathcal{D})$. 空间X和空间Q上的双线性泛函分别定义为

$$
a(v,w)=(\nabla v,\nabla w),\ \ \forall v,\ w\in X, \tag{5.3.23}
$$

$$
b(v,q)=-(\mathrm{div}v,q),\ \forall v\in X,\ \forall q\in Q. \tag{5.3.24}
$$

则方程(5.3.20)的弱变分形式为

$$
\begin{cases} a(u_h, v) + b(v, p_h) = (f, v) + (\dot{W}_h, v), & \forall v \in X, \\ b(u_h, q) = 0, & \forall q \in Q. \end{cases} \tag{5.3.25}
$$

设$P_k(T)$表示单元T上k次多项式空间. 这里介绍非协调的Crouzeix-Raviart(C-R)有限元空间和分片常数空间. C-R有限元空间为

$$
X_h := \left\{ v : v|_T \in [P_1(T)]^d : \int_E [v] \mathrm{d}s = 0, \forall E \in \mathcal{E}_h \right\},
$$

其中$v \in X_h$在$E \in \mathcal{E}_h$上的跳跃$[v]$定义为

$$
[v](x) := \begin{cases} \lim_{s\to 0}(v(x+sn) - v(x-sn)), & E \subsetneq \partial\mathcal{D}, \\ \lim_{s\to 0} -v(x-sn), & E \subset \partial\mathcal{D}, \end{cases}
$$

这里的n是E上单位法向量, $x \in E$. 对于$E \subset \partial\mathcal{D}$, 取$n$为相对于$\mathcal{D}$的外法向量, 而对于其它情况, n为任何固定方向的单位法向量. 分片多项式空间定义为

$$
Q_h = \left\{ q : q|_T \in P_0(T) : \int_{\mathcal{D}} q \mathrm{d}x = 0 \right\}.
$$

另外定义空间

$$
Z_h := \left\{ v \in X_h : \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \mathrm{div} v q \mathrm{d}x = 0, \ \forall q \in Q_h \right\}.
$$

事实上, 空间X_h, Q_h均满足inf-sup条件, 因此Z_h是非空的. 其实$Z_h = \{v \in X_h : \mathrm{div}_h v = 0\}$. 在上述有限元空间基础上, 引进随机Stokes方程(5.3.25)的有限元格式

$$
\begin{cases} a_h(\widehat{u}_h, v_h) - (\mathrm{div}_h v_h, \widehat{p}_h) = (f, v_h) + (\dot{W}_h, v_h), & \forall v_h \in X_h, \\ (\mathrm{div}_h \widehat{u}_h, q_h) = 0, & \forall q_h \in Q_h. \end{cases} \tag{5.3.26}
$$

这里$a_h(\widehat{u}_h, v_h)$定义为

$$
a_h(\widehat{u}_h, v_h) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\nabla \widehat{u}_h, \nabla v_h)_T,
$$

div_h表示分片的散度算子.

注 5.3.1 由于随机Stokes方程解的正则性较低, 即使采用高阶多项式也得不到高的收敛精度[74], 同时造成了计算的复杂性, C-R元是低阶元, 和分片常数空间结合又满足inf-sup条件, 所以使用C-R元在保证精度的情况下, 又减少了计算量.

定义离散空间X_h的范数

$$
\|\cdot\|_{1,h} := \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |\cdot|_{1,T}.
$$

对于速度和压力变量, 在上述离散范数和L_0^2范数下, 离散问题(5.3.26)满足其解存在的条件

$$a_h(u,v) \leqslant \|u\|_{1,h}\|v\|_{1,h}, \qquad \forall u,v \in X_h, \tag{5.3.27}$$

$$\sup_{v\in X_h} \frac{(\mathrm{div}_h v, q)}{\|v\|_{1,h}} \gtrsim \|q\|, \qquad \forall q \in Q_h. \tag{5.3.28}$$

根据鞍点问题的Brezzi理论(详见文献[75, 76]), 方程(5.3.26)有唯一的解.

为了估计方程(5.3.26)的有限元误差, 考虑如下辅助问题

$$\begin{cases} -\Delta\psi + \nabla\theta = f(x), & x \in \mathcal{D}, \\ \mathrm{div}\psi = g, & x \in \mathcal{D}, \\ \psi = 0, & x \in \partial\mathcal{D}. \end{cases} \tag{5.3.29}$$

此方程有唯一的解, 且满足下列正则性

$$\|\psi\|_2 + \|\theta\|_1 \lesssim \|f\| + \|g\|_1.$$

类似地, 方程(5.3.29)的有限元格式为: 求$(\psi_h, \theta_h) \in X_h \times Q_h$, 使得

$$\begin{cases} a_h(\psi_h, v_h) - (\mathrm{div}_h v_h, \theta_h) = (f, v_h)\ , & \forall v \in X_h, \\ (\mathrm{div}_h \psi_h, q_h) = (g, q_h), & \forall q_h \in Q_h. \end{cases} \tag{5.3.30}$$

方程(5.3.29)两边同乘以$v_h \in X_h$, 然后由分部积分得

$$a_h(\psi, v_h) - (\mathrm{div}_h v_h, \theta) = (f, v_h) + E_h(\psi, \theta, v_h), \tag{5.3.31}$$

其中一致性误差为

$$E_h(\psi,\theta,v_h) = \sum_{E\in\mathcal{E}_h} \int_E \nabla\psi n[v_h]\mathrm{d}s - \sum_{E\in\mathcal{E}_h} \int_E \theta n[v_h]\mathrm{d}s.$$

因此由式(5.3.30)和式(5.3.31), 下面的Galerkin正交关系成立

$$a_h(\psi-\psi_h, v_h) - (\mathrm{div}_h v_h, \theta-\theta_h) = E_h(\psi,\theta,v_h), \forall v_h \in X_h, \tag{5.3.32}$$

$$a_h(\psi-\psi_h, v_h) = E_h(\psi,\theta,v_h), \forall v_h \in Z_h, \tag{5.3.33}$$

其中E_h是由于$X_h \not\subseteq X$而出现的. 对于E_h, 下面的一致性误差估计成立.

引理 5.3.3 对于$\forall\psi \in H_0^1 \cap H^2$, $\forall w \in H^1$和$\forall\theta \in H^1 \cap L_0^2$,

$$E_h(\psi,\theta,v_h) \lesssim h(|\psi|_2 + |\theta|_1)\|w - v_h\|_{1,h}, \forall v_h \in X_h.$$

证明 由Cauchy-Schwartz不等式, 得

$$\begin{aligned}
& \left|\int_E (\nabla\psi n - \theta n)[v_h]\mathrm{d}s\right| \\
= & \left|\int_E (\nabla\psi n - \theta n)[v_h - w]\mathrm{d}s\right| \\
= & \left|\int_E (\nabla\psi n - \theta n - \lambda)[v_h - w - \mu]\mathrm{d}s\right| \\
\leqslant & \inf_{\lambda\in\mathbb{R}^2} \|\nabla\psi n - \theta n - \lambda\|_{0,E} \inf_{\mu\in\mathbb{R}^2} \|[v_h - w - \mu]\|_{0,E} \\
\lesssim & h(|\psi|_{2,T_E} + |\theta|_{1,T_E})|w - v_h|_{1,T_E}.
\end{aligned}$$

再次应用Cauchy-Schwartz不等式得到一致性误差估计

$$\begin{aligned}
E_h(\psi,\theta,v_h) & \lesssim h\left(\sum_{T\in\mathcal{T}_h} |\psi|_{2,T}^2 + |\theta|_{1,T}^2\right)^{1/2}\left(\sum_{T\in\mathcal{T}_h} |w - v_h|_{1,T}^2\right)^{1/2} \\
& \lesssim h(|\psi|_2 + |\theta|_1)\|w - v_h\|_{1,h}.
\end{aligned}$$

引理证毕. ¶

对于$\psi \in H^2 \cap H_0^1$和$\theta \in L_0^2 \cap H^1$, 则有结论(详见文献[94]):

$$\|\psi - \psi_h\|_{1,h} + \|\theta - \theta_h\| \lesssim h(\|\psi\|_2 + \|\theta\|_1). \tag{5.3.34}$$

对于$\psi - \psi_h$, 可用如下标准对偶方法估计(可参考文献[6, 74]).

定理 5.3.2 对于$\psi \in H^2 \cap H_0^1$和$\theta \in L_0^2 \cap H^1$, 有下面误差估计

$$\|\psi - \psi_h\| \lesssim h^2(\|\psi\|_2 + \|\theta\|_1).$$

证明 首先考虑共轭问题: 求φ和r, 使得

$$-\Delta\varphi - \nabla r = e, \qquad x \in \mathcal{D}; \qquad \mathrm{div}\varphi = 0, \qquad x \in \mathcal{D}, \tag{5.3.35}$$

其中$e = \psi - \psi_h$. 此方程的解满足下列正则性

$$\|\varphi\|_2 + \|r\|_1 \lesssim \|e\|. \tag{5.3.36}$$

式(5.3.35)中第一个式子两边同乘以e, 分部积分得

$$\|e\|^2 = a_h(e,\varphi) + E_h(\varphi, -r, -\psi_h) + (r, \mathrm{div}_h e). \tag{5.3.37}$$

设$\mathcal{R}_h$是空间X到X_h的C-R插值算子, π_0是空间Q到Q_h的L_2-投影算子. 由正交关系式(5.3.33), 得

$$\|e\|^2 = a_h(e, \varphi - \mathcal{R}_h\varphi) + E_h(\varphi, -r, -\psi_h) + E_h(\psi, \theta, \mathcal{R}_h\varphi) + (r - \pi_0 r, \mathrm{div}_h e).$$

注意到$\mathcal{R}_h\varphi \in Z_h$, 由引理5.3.3, 式(5.3.34), C-R元插值理论和分片常数插值理论得

$$\|e\|^2 \lesssim \|e\|_{1,h}\|\varphi - \mathcal{R}_h\varphi\|_{1,h} + h(\|\varphi\|_2 + \|r\|_1)\|\psi - \psi_h\|_{1,h} +$$

$$
\begin{aligned}
& h(\|\psi\|_2+\|\theta\|_1)\|\varphi-\mathcal{R}_h\varphi\|_{1,h}+\|r-\pi_0 r\|\ \|e\|_{1,h} \\
\lesssim\ & h^2(\|\varphi\|_2+\|r\|_1)(\|\psi\|_2+\|\theta\|_1) \\
\lesssim\ & h^2\|e\|(\|\psi\|_2+\|\theta\|_1).
\end{aligned}
$$

综合上述估计即可证明定理成立. ¶

由式(5.3.34), 又可得到对压力项$\theta-\theta_h$的估计, 即下述结论成立.

定理 5.3.3 对于$\psi\in H^2\cap H_0^1$和$\theta\in L_0^2\cap H^1$, 有下面误差估计

$$
\|\theta-\theta_h\|_{-1}\lesssim h^2(\|\psi\|_2+\|\theta\|_1). \tag{5.3.38}
$$

证明 设(ω_h,ϕ_h)是下列确定性Stokes问题的有限元逼近解,

$$
-\Delta\omega+\nabla\phi=0, x\in\mathcal{D},\quad \mathrm{div}\omega=l, x\in\mathcal{D}, \tag{5.3.39}
$$

则其有正则化估计

$$
\|\omega\|_2+\|\phi\|_1\lesssim\|l\|_1.
$$

下面应用对偶方法估计$\|\theta-\theta_h\|_{H^{-1}}$. 对于任意的$l\in H^1$,

$$
\begin{aligned}
& (\theta-\theta_h,l)=(\mathrm{div}\omega,\theta-\theta_h) \\
=\ & (\mathrm{div}_h(\omega-\omega_h),\theta-\theta_h)+(\mathrm{div}_h\omega_h,\theta-\theta_h) \\
=\ & (\mathrm{div}_h(\omega-\omega_h),\theta-\theta_h)+a_h(\psi-\psi_h,\omega_h)-E_h(\psi,\theta,\omega_h) \\
=\ & (\mathrm{div}_h(\omega-\omega_h),\theta-\theta_h)+a_h(\psi-\psi_h,\omega_h)-a_h(\psi-\psi_h,\omega)+ \\
& (\mathrm{div}_h(\psi-\psi_h),\phi)+E_h(\omega,\phi,\psi_h)-E_h(\psi,\theta,\omega_h) \\
=\ & (\mathrm{div}_h(\omega-\omega_h),\theta-\theta_h)+a_h(\psi-\psi_h,\omega_h-\omega)+(\mathrm{div}_h(\psi-\psi_h),\phi-\phi_h)+ \\
& E_h(\omega,\phi,\psi_h)-E_h(\psi,\theta,\omega_h).
\end{aligned}
$$

由式(5.3.34), 引理5.3.3和Cauchy-Schwartz不等式, 得

$$
\begin{aligned}
& (\theta-\theta_h,l) \\
\lesssim\ & \|\mathrm{div}_h(\omega-\omega_h)\|\ \|\theta-\theta_h\|+\|\psi-\psi_h\|_{1,h}\|\omega-\omega_h\|_{1,h}+ \\
& \|\mathrm{div}_h(\psi-\psi_h)\|\ \|\phi-\phi_h\|+ \\
& h(\|\omega\|_2+\|\phi\|_1)\|\psi-\psi_h\|_{1,h}+h(\|\psi\|_2+\|\theta\|_1)\|\omega-\omega_h\|_{1,h} \\
\lesssim\ & h^2(\|\omega\|_2+\|\phi\|_1)(\|\psi\|_2+\|\theta\|_1) \\
\lesssim\ & h^2\|l\|_1(\|\psi\|_2+\|\theta\|_1).
\end{aligned}
$$

因为$l\in H^1$是任意的, 根据H^{-1}-范数定义, 得

$$
\|\theta-\theta_h\|_{H^{-1}}\lesssim h^2(\|\psi\|_2+\|\theta\|_1).
$$

定理证毕. ¶

由上述估计, 可得到$u-\widehat{u}_h$在L^2-范数下和$p-\widehat{p}_h$在H^{-1}-范数下的有限元误差估计.

定理 5.3.4 设(u,p)和$(\widehat{u}_h,\widehat{p}_h)$分别是方程(5.3.1)和方程(5.3.26)的解, 则

(1) $d=2$时,

$$E(\|u-\widehat{u}_h\|^2)+E(\|p-\widehat{p}_h\|^2_{H^{-1}})\lesssim h^2|\ln h|, \tag{5.3.40}$$

(2) $d=3$时,

$$E(\|u-\widehat{u}_h\|^2)+E(\|p-\widehat{p}_h\|^2_{H^{-1}})\lesssim h. \tag{5.3.41}$$

证明 这里只证明式(5.3.40), 式(5.3.41)的证明方法类似. 由引理5.3.2, 有

$$E(\|u_h\|_2^2+\|p_h\|_1^2)\lesssim E(\|f(x)\|^2+\|\dot{W}_h\|^2)\lesssim h^{-2}.$$

则式(5.3.40)可由上式结论, 定理5.3.2, 定理5.3.3及三角不等式直接得到. ¶

5.4 研究进展评述

本节对随机椭圆方程的理论与有限元方法研究进展做一详细的介绍. 椭圆型随机方程的理论分析工作主要有R. Buckdahn和E. Pardoux[78], I. Babuska[79], S.V. Lototsky[80]等.

(1) R. Buckdahn和E. Pardoux在文献[78]中研究了半线性椭圆型随机偏微分方程

$$\begin{cases} -\Delta u(x)+f(u(x))=g(x)+\dot{W}(x), & x\in\mathcal{D}, \\ u(x)=0, & x\in\partial\mathcal{D}, \end{cases} \tag{5.4.1}$$

其中$\mathcal{D}\subset\mathbb{R}^n$是有界开集, $\dot{W}(x)$是白噪声. 通过把式(5.4.1)转化成一个等价的Hammerstein积分方程, 作者得到了式(5.4.1)弱解的存在唯一性.

(2) I. Babuska在文献[79]中研究了带有随机系数的二阶椭圆边值问题

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a\nabla u(x))=f(x), & x\in D\in\mathbb{R}^d, d=1,2,3, \\ u(x)=0, & x\in\partial D, \end{cases} \tag{5.4.2}$$

其中$0<\alpha_1\leqslant a\leqslant\alpha_2$是一个随机函数. 通过把随机方程变换为一个等价的确定性方程, 再应用摄动方法和逐次逼近的方法, 作者得到了Sobolev空间下的严格误差估计.

(3) S.V. Lototsky在文献[80]中研究了与文献[79]同样类型的方程(5.4.2), 其中方程的解是由Wiener Chaos展开的形式给出的. 作者在非常弱的假设条件下, 得到了方程解的存在唯一性.

(4) 对于椭圆类随机偏微分方程的有限元方法, Y. Cao做了一系列的研究工作. 不同于随机发展方程, 随机椭圆方程有限元问题和正则化方程的误差估计采用的是对偶讨论技巧. 因为高维区域Laplace算子Green函数的正则性比较低, 因此在文献[20]中, 作者得到了高维区域误差收敛精度低于低维时的精度.

(5) 在文献[74]中, Y. Cao等研究了随机Stokes方程

$$\begin{cases} -\nu u(x) + \nabla p(x) = f(x) + \dot{W}(x), & x \in \mathcal{D}, \\ \mathrm{div} u(x) = 0, & x \in \mathcal{D} \\ u(x) = 0, x \in \partial\mathcal{D}, \end{cases} \tag{5.4.3}$$

的有限元方法, 得到速度在L^2范数下和压力在H^{-1}下的有限元误差估计.

(6) R.M Yao在文献[81]中用Green函数的方法研究了二维和三维空间中椭圆型随机偏微分方程

$$-\Delta u(x) = \lambda u(x) + q(x) + \dot{W}(x),\ x \in \mathrm{D}; \quad u|_{\partial\mathcal{D}} = 0$$

的有限元方法, 得到了L^2误差估计.

(7) I. Babuska, R. Tempone和G.E. Zouraris在文献[82]中研究了方程(5.4.1)的Galerkin有限元逼近, 得到了收敛阶.

(8) I. Gyöngy和T. Martinez[83]研究了一类随机椭圆型方程

$$\Delta u(x) = f(u(x)) + g(x) + \frac{\partial^d}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x^d} W(x),\ x = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$$

在边界条件$u|_{\partial\mathcal{D}} = 0$下的数值方法, 得到了数值方法的收敛速度.

(9) K. Zhang等在文献[84]中研究了一类椭圆型随机偏微分方程

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + f(u(x)) = g(x) + \dot{W}(x), & x \in \mathit{\Omega} = [0,1]^2, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\mathit{\Omega} \end{cases} \tag{5.4.4}$$

的区域分解方法. 作者证得算法的收敛速度既与有限元网格参数有关又与区域分解中子区域个数有关.

(10) H.G. Matthies和A. Keese[85]研究了线性和非线性椭圆型方程(5.4.1)的Galerkin有限元方法. 作者为数值模拟方程解的期望和方差提供了一个有效的算法, 并研究了算法的稳定性.

(11) W. Subber和S. Loisel[86]研究了一类椭圆型偏微分方程

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (K(x,\omega)\nabla u(x,\omega)) = f(x,\omega), & x \in D \in \mathbb{R}^3, \omega \in \mathit{\Omega}, \\ u(x,\omega) = 0, & x \in \partial D, \omega \in \mathit{\Omega} \end{cases} \tag{5.4.5}$$

的Schwartz先验条件, 其中$(\mathit{\Omega}, \mathcal{F}, P)$是一个完备的概率空间. 作者指出所提算法的性能依赖于几何参数、随机性、空间维数和随机展开的阶数.

(12) X. Yang, R. Qi[87]研究了一类随机Stokes方程

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + \nabla p(x) = f(x) + \dot{W}(x), & x \in \mathcal{D}, \\ \mathrm{div} u(x) = 0, & x \in \mathcal{D}, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\mathcal{D} \end{cases} \tag{5.4.6}$$

的非协调有限元方法. 作者应用Green函数框架和标准对偶讨论技巧分别得到了速度在L^2范数下和压力在H^{-1}范数下的非协调有限元误差估计.

更多关于随机椭圆方程、Stokes方程以及Navier-Stokes方程的文献, 可见文献[88–94]等.

第6章　随机积分微分方程有限元方法

积分微分方程被广泛应用于经济、物理和生态等许多实践领域. 随着科学技术的飞速发展, 要求对实际问题的描述越来越精确, 随机因素对事物的运动规律的影响越来越受到人们的重视, 从而对这些实际系统的描述, 也就自然地从确定性的积分微分方程转到随机积分微分方程. 本章以随机积分微分方程为例, 介绍随机积分微分方程有限元理论分析方法. 首先对随机积分微分方程的理论结果进行综述, 给出方程解的存在性、唯一性和正则性定理, 并推导出随机积分微分方程温和解的表达形式. 然后在适当的假设条件下, 给出随机积分微分方程的空间半离散格式的有限元误差估计和全离散格式的有限元误差估计, 并且得到了最优估计.

6.1　随机积分微分方程的理论分析

本节对随机积分微分方程的理论结果进行综述, 给出方程解的存在性、唯一性和正则性定理, 并推导出随机积分微分方程温和解的表达形式. 本节内容主要选自文献[95].

6.1.1　问题的陈述

设$\mathcal{O}\subset\mathbb{R}^d$是具有光滑边界的空间区域. 考虑如下由可乘Gaussian噪声驱动的Volterra类型的随机发展方程

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}u+\left(\int_0^t b(t-s)Au(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t=F(u)\mathrm{d}t+G(u)\mathrm{d}W,\quad t\in[0,T],\\&u(0)=u_0,\end{aligned}\tag{6.1.1}$$

其中随机过程$\{u(t)\}_{t\in[0,T]}$定义在概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P,\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0})$上, 取值于可分Hilbert空间$H=L^2(\mathcal{O})$, $(\cdot,\cdot)$和$\|\cdot\|$分别表示H中的内积和范数. W是可分Hilbert空间U上的Q-Wiener过程, 其中Q是U上自伴、半正定的线性算子, 不必有有界的迹. 算子$A:\mathcal{D}(A)\subset H\to H$是无界、线性、具有紧逆的自伴算子.

定义 6.1.1　*设$a\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$是次指数增长的, 即对所有的$\varepsilon>0$, 满足$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\varepsilon t}|a(t)|\mathrm{d}t<\infty$.*

(1) 若对任意的$\mathrm{Re}\lambda>0$有$\hat{a}(\lambda)\neq 0$, 令

$$\theta=\sup\{|\arg\hat{a}(\lambda)|,\mathrm{Re}\lambda>0\},\tag{6.1.2}$$

则称a是θ-扇形的.

(2) 若存在常数$c>0$使得

$$|\lambda^n\hat{a}^{(n)}(\lambda)|\leqslant c|\hat{a}(\lambda)|,\mathrm{Re}\lambda>0,0\leqslant n\leqslant k(k\in\mathbb{N})$$

成立, 则称$a(t)$是k-正则的.

定义 6.1.2 设$a \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$且$k \geqslant 2$. 若对所有的$t > 0, 0 \leqslant n \leqslant k-2$, 有$a \in C^{k-2}(0,\infty)$成立, 并且$(-1)^n a^{(n)}(t) \geqslant 0$, $(-1)^{k-2}a^{(k-2)}(t)$非增且凸, 则称$a(t)$是k-单调的.

为了使随机积分微分方程(6.1.1)存在唯一解, 下面对积分核b和非线性项F, G及初值u_0进行假设.

假设 6.1.1 设积分核$0 \neq b \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$是次指数增长、2-正则、扇角$\theta$小于$\pi/2$且其Laplace变换的边界函数$g(k) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \hat{b}(\varepsilon + ik)$满足如下增长条件:

(1) 对$1 \leqslant p < \infty$, $k \to g(k)/(|k| + |g(k)|) \in L^p(\mathbb{R})$;

(2) 存在$C > 0$, $1 < \rho := 1 + \frac{\pi}{2}\sup\{|\arg\hat{b}(\lambda)|, \mathrm{Re}\lambda > 0\} < 2$使得对所有的$\mu > 0$有

$$\int_0^\infty \frac{|g(k)|}{(|k| + \mu|g(k)|^2)^2}\mathrm{d}k \leqslant C/\mu \tag{6.1.3}$$

和

$$\int_0^\infty \frac{|k^2 g'''(k)| + |kg''(k)| + |g'(k)| + 1/\mu}{(|k| + \mu|g(k)|^2)^2}\mathrm{d}k \leqslant C/\mu^{1+1/\rho} \tag{6.1.4}$$

成立.

注 6.1.1 若b是4-单调的, $\lim\limits_{t\to\infty} b(t) = 0$且

$$\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{t}\int_0^t sb(s)\mathrm{d}s}{\int_0^t -s\dot{b}(s)\mathrm{d}s} < +\infty. \tag{6.1.5}$$

则有

$$\rho := 1 + \frac{\pi}{2}\sup\{|\arg\hat{b}(\lambda)|, \mathrm{Re}\lambda > 0\} \in (1,2). \tag{6.1.6}$$

假设 6.1.2 设$\rho \in (1,2)$如假设6.1.1所定义且$r < 1$. 假设$F : \dot{H}^{r-1+\frac{1}{\rho}} \to \dot{H}^{-1+r}$, 非线性项$G : \dot{H}^{r-1+\frac{1}{\rho}} \to L_2^0$满足$G(\dot{H}^{r-1+\frac{1}{\rho}}) \subset L^0_{2,r-1+\frac{1}{\rho}}$, 并且有

$$\|F(x) - F(y)\|_{\dot{H}^{-1+r}} \leqslant C\|x-y\|_{\dot{H}^{r-1+\frac{1}{\rho}}}, \tag{6.1.7}$$

$$\|G(x) - G(y)\|_{L_2^0} \leqslant C\|x-y\|_{\dot{H}^{r-1+\frac{1}{\rho}}}, \tag{6.1.8}$$

$$\|G(x)\|_{L^0_{2,r-1+\frac{1}{\rho}}} \leqslant C(1 + \|x\|\dot{H}^{r-1+\frac{1}{\rho}}). \tag{6.1.9}$$

假设 6.1.3 设$\rho \in (1,2)$如假设6.1.1所定义, $r < 1$且$p \geqslant 2$. 假设初始值u_0是$\dot{H}^{r+\frac{1}{\rho}}$-值$\mathcal{F}_0$可测的, 即$u_0 \in L^p(\Omega; \dot{H}^{r+\frac{1}{\rho}})$.

下面是关于函数的Laplace变换在L_1范数下的重要结果, 其证明可见文献[95].

定理 6.1.1 设r是右半平面的解析函数, 其边界函数为$g(x)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0} r(\varepsilon+ix), x\in\mathbb{R}$. 若$g$是有界变差函数且$g\in L^p(\mathbb{R})(1\leqslant p<\infty)$, 则存在$f\in L^1(\mathbb{R}_+)$满足$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}f(t)\mathrm{d}t=r(\lambda)$且有

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}_+)}\leqslant \frac{1}{2}\|g'\|_{L^1(\mathbb{R}_+)}.$$

下面引理是我们经常用到的一个基本估计, 对此加以陈述并给予证明.

引理 6.1.1 若$k\in(-2,0)$且$h,t>0$, 则存在$C>0$使得

$$\int_t^{t+h}\int_0^t(\eta-\sigma)^{\frac{k}{2}-1}\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\eta\leqslant Ch^{\frac{k}{2}+1} \tag{6.1.10}$$

和

$$\int_t^{t+h}\left(\int_0^t(\eta-\sigma)^{k-1}\mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\eta\leqslant Ch^{\frac{k}{2}+1} \tag{6.1.11}$$

成立.

证明 对于式(6.1.10)有

$$\int_t^{t+h}\int_0^t(\eta-\sigma)^{\frac{k}{2}-1}\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\eta=C\int_t^{t+h}((\eta-t)^{\frac{k}{2}}-\eta^{\frac{k}{2}})\mathrm{d}\eta\leqslant C\int_t^{t+h}(\eta-t)^{\frac{k}{2}}\mathrm{d}\eta=Ch^{\frac{k}{2}+1},$$

对于式(6.1.11)有

$$\int_t^{t+h}\left(\int_0^t(\eta-\sigma)^{k-1}\mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\eta=C\int_t^{t+h}((\eta-t)^k-\eta^k)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\eta\leqslant C\int_t^{t+h}(\eta-t)^{\frac{k}{2}}\mathrm{d}\eta=Ch^{\frac{k}{2}+1}.$$

证毕. ¶

6.1.2 积分微分方程的预解系

若b满足假设6.1.1, 则存在预解系$\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$使得函数$u(t)=S(t)u_0$是下式

$$\begin{aligned}&\dot{u}(t)+A\int_0^t b(t-s)u(s)\mathrm{d}s=0, t>0,\\&u(0)=u_0,\end{aligned} \tag{6.1.12}$$

的唯一解. 注意到由于式(6.1.12)存在记忆项, 所以预解系不满足半群性质. 然而$S(t)$可表示为

$$S(t)v=\sum_{k=1}^{+\infty}s_k(t)(v,e_k)e_k, v\in H,$$

其中函数$s_k(t)$是常微分方程

$$\begin{cases}\dot{s}_k(t)+\lambda_k\int_0^t b(t-s)s_k(s)\mathrm{d}s=0,\\ s_k(0)=1,\end{cases} \tag{6.1.13}$$

的解, $\{\lambda_k, e_k\}$是A的特征对. 对于函数$\{s_k\}_{k\geqslant 1}$, 有以下重要性质.

引理 6.1.2 假设b满足假设6.1.1且$\rho \in (1,2)$如式(6.1.6)所定义, 则对所有的$\mu > 0$, 存在$C_0 > 0$, 使得

$$\|s_\mu\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} \leqslant 1, \tag{6.1.14}$$

$$\|s_\mu\|_{L^1(\mathbb{R}_+)} \leqslant C_0 \mu^{-1/\rho}, \tag{6.1.15}$$

$$\|\dot{s}_\mu\|_{L^1(\mathbb{R}_+)} + \|t\ddot{s}_\mu\|_{L^1(\mathbb{R}_+)} \leqslant C_0, \tag{6.1.16}$$

$$\|t\dot{s}_\mu\|_{L^1(\mathbb{R}_+)} + \|t^2\ddot{s}_\mu\|_{L^1(\mathbb{R}_+)} \leqslant C_0 \mu^{-1/\rho}. \tag{6.1.17}$$

证明 式(6.1.14)的证明可参考文献[197]的推论1.2, 在此不再赘述. 下面证明式(6.1.16)成立. 设$F_\mu^1 = \widehat{\dot{s}_\mu}, f_\mu^1 = \widehat{t\ddot{s}_\mu}, F_\mu^2 = \widehat{t\dot{s}_\mu}, f_\mu^2 = \widehat{t^2\ddot{s}_\mu}$. 则$F_\mu^1(\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu\hat{b}(\lambda)} - 1 = -\mu\frac{\hat{b}(\lambda)}{\lambda + \mu\hat{b}(\lambda)}$, 且有

$$f_\mu^1(\lambda) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\mu\frac{\lambda\hat{b}(\lambda)}{\lambda + \mu\hat{b}(\lambda)} + \dot{s}_\mu(0)\right) = \mu\frac{\mu\hat{b}(\lambda)^2 + \lambda^2\hat{b}'(\lambda)}{(\lambda + \mu\hat{b}(\lambda))^2}.$$

然而

$$F_\mu^2 = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}F_\mu^1 = \mu\frac{\lambda\hat{b}'(\lambda) - \hat{b}(\lambda)}{(\lambda + \mu\hat{b}(\lambda))^2},$$

$$\begin{aligned} f_\mu^2 &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}f_\mu^1 \\ &= \mu\frac{\mu\lambda^2\hat{b}''(\lambda)\hat{b}(\lambda) - 2\mu\lambda^2(\hat{b}'(\lambda))^2 + \lambda^3\hat{b}''(\lambda) - 4\lambda^2\hat{b}'(\lambda) + 2\mu\hat{b}(\lambda)^2 + 4\lambda\hat{b}(\lambda)}{(\lambda + \mu\hat{b}(\lambda))^3}, \end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}F_\mu^2(\lambda) = \mu\frac{\lambda\hat{b}''(\lambda)(\lambda + \mu\hat{b}(\lambda)) + 2(\hat{b}(\lambda) - \lambda\hat{b}'(\lambda))(\mu\hat{b}'(\lambda) + 1)}{(\lambda + \mu\hat{b}(\lambda))^3},$$

且有

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}f_\mu^2(\lambda) = \mu\lambda^2\frac{\lambda^2\hat{b}^{(3)}(\lambda) + 6\mu^2\hat{b}'(\lambda)^3 + 6\mu\hat{b}'(\lambda)^2 - 6\lambda\mu\hat{b}'(\lambda)\hat{b}''(\lambda)}{(\lambda + \mu\hat{b}(\lambda))^4} + \\ &\mu^2\hat{b}'(\lambda)^2\frac{\lambda^2\mu\hat{b}^{(3)}(\lambda) + 6\lambda\mu\hat{b}''(\lambda) + 6\mu\hat{b}'(\lambda) + 6}{(\lambda + \mu\hat{b}(\lambda))^4} + \\ &2\lambda\mu^2\hat{b}'(\lambda)\frac{-6\mu\hat{b}'(\lambda)^2 + \lambda(\lambda\hat{b}^{(3)}(\lambda) + 3\hat{b}''(\lambda)) - 3\hat{b}'(\lambda)(\lambda\mu\hat{b}''(\lambda) + 2)}{(\lambda + \mu\hat{b}(\lambda))^4}. \end{aligned} \tag{6.1.18}$$

由于b是扇形的, 则存在常数C使得$|\lambda + \mu\hat{b}(\lambda)| \geqslant C(|\lambda| + \mu|\hat{b}(\lambda)|)$成立. 利用$b$的2-正则性, 即$|\lambda^n\hat{b}^{(n)}(\lambda)| \leqslant C|\hat{b}(\lambda)|$, 对于$1 \leqslant p < \infty$, 得到$F_\mu^1, f_\mu^1 \in H^p(\mathbb{R})$且有

$$\int_0^\infty |F_\mu^2(ik)|\mathrm{d}k \leqslant C\mu\int_0^\infty \frac{|g(k)|}{(|k| + \mu|g(k)|^2)^2}\mathrm{d}\lambda \leqslant C.$$

对于$f_\mu^2 = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}f_\mu^1$具有相同的估计. 因此由假设6.1.1和定理6.1.1得到式(6.1.16)成立.

下面证明式(6.1.17)成立. 由于$f_\mu^2, F_\mu^2 \in H^1$, 再次利用b的2-正则性得到

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}F_\mu^2(\lambda = ik)\right| + \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}f_\mu^2(\lambda = ik)\right| \leqslant C\mu\frac{|k^2g'''(k)| + |kg''(k)| + |g'(k)| + 1/\mu}{(|k| + \mu|g(k)|^2)^2},$$

因此由假设6.1.1和定理6.1.1得到式(6.1.17)成立.

下面证明式(6.1.15). 由于$s_\mu(t) = s_\mu(R) - \int_t^R \dot{s}_\mu(\tau)\mathrm{d}\tau$成立, 由式(6.1.16)知$R \to \infty$时, $s_\mu(R)$的极限存在且满足

$$\lim_{R\to\infty} s_\mu(R) = \lim_{\lambda\to 0+} \lambda \hat{s}_\mu(\lambda) = \lim_{\lambda\to 0+} \frac{\lambda}{\lambda + \mu\hat{b}(\lambda)} = 0.$$

因此

$$s_\mu(t) = -\int_t^\infty \dot{s}_\mu(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

$$\|s_\mu\|_{L^1(\mathbb{R}_+)} \leqslant \int_0^\infty \int_t^\infty |\dot{s}_\mu(\tau)|\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t = \int_0^\infty \tau|\dot{s}_\mu(\tau)|\mathrm{d}\tau = |t\dot{s}_\mu|_1 \leqslant C_0\mu^{-1/\rho}.$$

证毕. ¶

引理6.1.2给出了s_k的性质, 由此进一步可得预解系$\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$的光滑性质和稳定性质, 即如下引理成立(其证明选自文献[95, 96]).

引理 6.1.3 *假设卷积核b满足假设6.1.1, 则存在$C>0$使得*

$$\|A^s S(t)\|_{L(H)} \leqslant Ct^{-s\rho}, t>0, s\in[0,\frac{1}{\rho}], \tag{6.1.19}$$

$$\|A^s \dot{S}(t)\|_{L(H)} \leqslant Ct^{-s\rho-1}, t>0, s\in[0,\frac{1}{\rho}], \tag{6.1.20}$$

$$\|A^{-s}\dot{S}(t)\| \leqslant C\|b\|^s_{L^1(0,t)} t^{s-1}, s\in[0,1], \tag{6.1.21}$$

$$\int_0^t \|S(s)x\|^2\mathrm{d}s \leqslant C\|x\|^2_{-\frac{1}{\rho}}, t>0. \tag{6.1.22}$$

证明 先证式(6.1.19)成立. 对$\forall\delta \in (0,1)$及$k \geqslant 1$, 由Hölder's不等式, 式(6.1.16)和式(6.1.17)有

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} u^\delta|\dot{s}_\mu(u)|\mathrm{d}u &= \int_0^{+\infty} u^\delta|\dot{s}_\mu(u)|^\delta|\dot{s}_\mu(u)|^{1-\delta}\mathrm{d}u \\
&\leqslant \left(\int_0^{+\infty} u|\dot{s}_\mu(u)|\mathrm{d}u\right)^\delta \left(\int_0^{+\infty} |\dot{s}_\mu(u)|\mathrm{d}u\right)^{1-\delta} \\
&\leqslant C\lambda_\mu^{-\delta/\rho}.
\end{aligned}$$

由式(6.1.16)和式(6.1.17)知, $\delta=0,1$时上式也成立. 因为$\lim_{r\to\infty} s_\mu(r)=0$, 所以

$$s_\mu(t) = -\int_t^\infty u^{-\delta}u^\delta \dot{s}_\mu(u)\mathrm{d}u$$

成立. 由于

$$|s_\mu(t)| \leqslant Ct^{-\delta}\lambda_\mu^{-\delta/\rho}, t>0, \delta\in[0,1]. \tag{6.1.23}$$

则对任何$s\in[0,1/\rho], 0\leqslant\delta=\rho s\leqslant 1$, 由式(6.1.23)知

$$\|A^s S(t)x\|^2 = \sum_{\mu\geqslant 1} \lambda_\mu^{2s} s_\mu(t)^2 (x,e_\mu)^2 \leqslant Ct^{-2\rho s}\|x\|^2,$$

式(6.1.19)得证.

下面证明式(6.1.21)成立. 由文献[198]的推论3.3知, 在假设6.1.1下, 因为0属于A的预解集, 则存在$M>0$使得

$$\|\dot{S}(t)x\| \leqslant Mt^{-1}\|x\|, x\in H, t>0. \tag{6.1.24}$$

另一方面, 由式(6.2.8)和式(6.1.2)知

$$\begin{aligned}
\|\dot{S}(t)x\|^2 &= \sum_{\mu\geqslant 1}(\dot{s}_\mu(t))^2(x,e_\mu)^2 \\
&= \sum_{\mu\geqslant 1}\lambda_\mu^2\left(\int_0^t b(t-s)s_\mu(s)ds\right)^2(x,e_\mu)^2 \\
&\leqslant \|b\|^2_{L^1(0,t)}\|Ax\|^2.
\end{aligned} \tag{6.1.25}$$

对式(6.1.24)和式(6.1.25)应用内插理论, 得式(6.1.21)成立.

下面证明式(6.1.20)成立. 对于$0<\delta<1$, 应用Hölder's不等式得,

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty t^{\delta+1}|\ddot{s}_\mu(t)|\mathrm{d}t = \int_0^\infty |t^2\ddot{s}_\mu(t)|^\delta |t\ddot{s}_\mu(t)|^{1-\delta}\mathrm{d}t \\
\leqslant &\left(\int_0^\infty |t^2\ddot{s}_\mu(t)|\mathrm{d}t\right)^\delta \left(\int_0^\infty |t\ddot{s}_\mu(t)|\mathrm{d}t\right)^{1-\delta} \leqslant C_0\mu^{-\frac{\delta}{\rho}},
\end{aligned}$$

注意到由式(6.1.17)知此估计式对于$\delta=1$成立.

由于$\lim\limits_{t\to\infty}\dot{s}_\mu(t)=0$, 则

$$|\dot{s}_\mu(t)| = \left|\int_t^\infty \ddot{s}_\mu(r)\mathrm{d}r\right| = \left|\int_t^\infty r^{-\delta-1}r^{\delta+1}\ddot{s}_\mu(r)\mathrm{d}r\right| \leqslant C_0t^{-\delta-1}\mu^{-\frac{\delta}{\rho}}.$$

即

$$|\mu^s\dot{s}_\mu(t)| \leqslant C_0t^{-1-\rho s}, 0<s\leqslant\frac{1}{\rho}.$$

因此

$$\|A^s\dot{S}(t)x\|^2 = \sum_{k=1}^\infty(\lambda_k^s\dot{s}_{\lambda_k(t)})^2(x,e_k)^2 \leqslant C_0t^{-2-2\rho s}\|x\|^2,$$

式(6.1.20)得证.

最后证明式(6.1.22)成立. 由式(6.1.14)和式(6.1.15)知

$$\begin{aligned}
\int_0^t\|S(s)x\|^2\mathrm{d}s &= \sum_{k=1}^\infty\int_0^t s_k^2(s)\mathrm{d}s(x,e_k)^2 \\
&\leqslant \sum_{k=1}^\infty\|s_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)}\|s_k\|_{L^1(\mathbb{R}_+)}(x,e_k)^2 \\
&\leqslant C_0\sum_{k=1}^\infty\lambda_k^{-1/\rho}(x,e_k)^2 = C_0\|x\|^2_{-\frac{1}{\rho}}.
\end{aligned}$$

证毕. ¶

6.1.3 随机积分微分方程温和解的存在性和唯一性

本小节首先给出随机积分微分方程(6.1.1)的温和解的定义, 然后证明其温和解的存在唯一性和正则性.

定义 6.1.3 设$r<1$, 若映射Φ_{u_0}由如下定义

$$\Phi_{u_0}(u)(t):=S(t)u_0+\int_0^t S(t-s)F(u(s))\mathrm{d}s+\int_0^t S(t-s)G(u(s))\mathrm{d}W(s),t\in[0,T],$$

给出, 且对所有的$t\in[0,T]$几乎处处有$\Phi_{u_0}(u)(t)=u(t)$, 即

$$u(t)=S(t)u_0+\int_0^t S(t-s)F(u(s))\mathrm{d}s+\int_0^t S(t-s)G(u(s))\mathrm{d}W(s). \tag{6.1.26}$$

则称$\dot{H}^{r-1+\frac{1}{\rho}}$-值过程$\{u(t)\}_{t\in[0,T]}$是式(6.1.1)的温和解.

下面给出Φ_{u_0}的光滑性质, 它是证明随机积分微分方程温和解的存在性和唯一性的重要工具.

引理 6.1.4 如果假设6.1.1 ～假设6.1.3成立. 令$k=(r-s-1)\rho$, 设$T>0$, $p\geqslant 2$, 初始值$u_0\in L^p(\Omega;\dot{H}^{r+\frac{1}{\rho}})$是$\mathcal{F}_0$可测的, 且$\{u(t)\}_{t\in[0,T]}$是可料过程, 有

$$u\in L^\infty([0,T];L^p(\Omega,\dot{H}^{r-1+\frac{1}{\rho}})).$$

则对$s<r-1+\frac{2}{\rho}$且$T>0$, 有

$$\|\Phi_{u_0}(u)\|_{C^{\min\{\frac{1}{2},\frac{k}{2}+1\}}([0.T];L^p(\Omega;\dot{H}^s))}\leqslant C_T\left(1+\|u\|_{L^\infty([0.T];L^p(\Omega,\dot{H}^{r-1+\frac{1}{\rho}}))}\right). \tag{6.1.27}$$

特殊地, 有

$$\Phi_0(u)(t)_{L^p(\Omega;\dot{H}^s)}\leqslant C_T t^{\min\{\frac{1}{2},\frac{k}{2}+1\}}\left(1+\|u\|_{L^\infty([0.T];L^p(\Omega,\dot{H}^{r-1+\frac{1}{\rho}}))}\right). \tag{6.1.28}$$

证明 首先证明式(6.1.27). 设$0\leqslant t<t+h\leqslant T$, 则

$$\begin{aligned}
&\Phi_{u_0}(u)(t+h)-\Phi_{u_0}(u)(t)\\
=\ &(S(t+h)-S(t))u_0+\int_t^{t+h}S(t+h-\sigma)F(u(\sigma))\mathrm{d}\sigma+\\
&\int_0^t(S(t+h-\sigma)-S(t-\sigma))F(u(\sigma))\mathrm{d}\sigma+\\
&\int_t^{t+h}S(t+h-\sigma)G(u(\sigma))\mathrm{d}W(\sigma)+\\
&\int_0^t(S(t+h-\sigma)-S(t-\sigma))G(u(\sigma))\mathrm{d}W(\sigma)\\
=:\ &I_1+I_2+I_3+I_4+I_5.
\end{aligned}$$

对于I_1, 应用式(6.1.21)和假设6.1.3得

$$\begin{aligned}
\|I_1\|_{L^p(\Omega;\dot{H}^s)} &= \left\|\int_t^{t+h}\dot{S}(\eta)u_0\mathrm{d}\eta\right\|_{L^p(\Omega;\dot{H}^s)}\\
&= \left\|\int_t^{t+h}A^{\frac{s-r-1/\rho}{2}}\dot{S}(\eta)A^{\frac{r+1/\rho}{2}}u_0\mathrm{d}\eta\right\|_{L^p(\Omega;H)}\\
&\leqslant C\int_t^{t+h}\eta^{\min\{-\frac{1}{2},\frac{r+1/\rho-s}{2}-1\}}\mathrm{d}\eta\|u_0\|_{L^p(\Omega;\dot{H}^{r+1/\rho})}\\
&\leqslant C\int_t^{t+h}\eta^{\min\{-\frac{1}{2},\frac{k}{2}\}}\mathrm{d}\eta\|u_0\|_{L^p(\Omega;\dot{H}^{r+1/\rho})}\\
&\leqslant Ch^{\min\{\frac{1}{2},\frac{k}{2}+1\}}\|u_0\|_{L^p(\Omega;\dot{H}^{r+1/\rho})},
\end{aligned}$$

其中$\frac{k}{2}<\frac{r+1/\rho-s}{2}-1<-\frac{1}{2}$当且仅当$s>r+\frac{1}{\rho}-1$.

应用式(6.1.19)和假设6.1.2中的式(6.1.7), 项I_2有

$$\begin{aligned}
\|I_2\|_{L^p(\Omega;\dot{H}^s)} &\leqslant \left\|\int_t^{t+h}A^{\frac{s-r+1}{2}}S(t+h-\sigma)A^{\frac{r-1}{2}}F(u(\sigma))\mathrm{d}\sigma\right\|_{L^p(\Omega;H)}\\
&\leqslant C\int_t^{t+h}(t+h-\sigma)^{\min\{0,\frac{k}{2}\}}\mathrm{d}\sigma\left(1+\|u\|_{L^\infty([0,T];L^p(\Omega,\dot{H}^{r-1+\frac{1}{\rho}}))}\right)\\
&\leqslant Ch^{\min\{\frac{1}{2},\frac{k}{2}+1\}}\left(1+\|u\|_{L^\infty([0,T];L^p(\Omega,\dot{H}^{r-1+\frac{1}{\rho}}))}\right).
\end{aligned}$$

对于项I_3, 由式(6.1.20), 式(6.1.10)和假设6.1.2中的式(6.1.7)有

$$\begin{aligned}
\|I_3\|_{L^p(\Omega;\dot{H}^s)} &= \left\|\int_0^t\int_t^{t+h}A^{\frac{s-r+1}{2}}\dot{S}(\eta-\sigma)A^{\frac{r-1}{2}}F(u(\sigma))\mathrm{d}\sigma\right\|_{L^p(\Omega;H)}\\
&\leqslant C\int_t^{t+h}\int_0^t(\eta-\sigma)^{\min\{-1,\frac{k}{2}-1\}}\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\eta\left(1+\|u\|_{L^\infty([0,T];L^p(\Omega,\dot{H}^{r-1+\frac{1}{\rho}}))}\right)\\
&\leqslant C\int_t^{t+h}\int_0^t(\eta-\sigma)^{\min\{-\frac{3}{2},\frac{k}{2}-1\}}\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\eta\left(1+\|u\|_{L^\infty([0,T];L^p(\Omega,\dot{H}^{r-1+\frac{1}{\rho}}))}\right)\\
&\leqslant Ch^{\min\{\frac{1}{2},\frac{k}{2}+1\}}\left(1+\|u\|_{L^\infty([0,T];L^p(\Omega,\dot{H}^{r-1+\frac{1}{\rho}}))}\right).
\end{aligned}$$

类似地, 由式(6.1.19)和假设6.1.2中的式(6.1.9)得到

$$\begin{aligned}
\|I_4\|_{L^p(\Omega;\dot{H}^s)} &\leqslant \left\|\int_t^{t+h}A^{\frac{s-r+1-1/\rho}{2}}S(t+h-\sigma)A^{\frac{r-1+1/\rho}{2}}G(u(\sigma))\mathrm{d}W(\sigma)\right\|_{L^p(\Omega;H)}\\
&\leqslant C\left\|\left(\int_t^{t+h}(t+h-\sigma)^{\min\{0,k+1\}}\|A^{\frac{r-1+1/\rho}{2}}G(u(\sigma))\|_{L_2^0}^2\mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(\Omega;H)}\\
&\leqslant Ch^{\min\{\frac{1}{2},\frac{k}{2}+1\}}\left(1+\|u\|_{L^\infty([0,T];L^p(\Omega,\dot{H}^{r-1+\frac{1}{\rho}}))}\right).
\end{aligned}$$

为了界定项I_5, 应用式(6.1.20), 式(6.1.11)和假设6.1.2中的式(6.1.9)得到

$$\begin{aligned}\|I_5\|_{L^p(\Omega;\dot{H}^s)} &= \left\|\int_0^t\int_t^{t+h}\dot{S}(\eta-\sigma)\mathrm{d}\eta G(u(\sigma))\mathrm{d}W(\sigma)\right\|_{L^p(\Omega;\dot{H}^s)}\\ &\leqslant C\int_t^{t+h}\left\|\int_0^t A^{\frac{s-r+1-1/\rho}{2}}\dot{S}(\eta-\sigma)A^{\frac{r-1+1/\rho}{2}}G(u(\sigma))\mathrm{d}W(\sigma)\right\|_{L^p(\Omega;\dot{H}^s)}\mathrm{d}\eta\\ &\leqslant C\int_t^{t+h}\left\|\left(\int_0^t(\eta-\sigma)^{\min\{-1,k-1\}}\|G(u(\sigma))\|^2_{L^0_{2,r-1+1/\rho}}\mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R})}\mathrm{d}\eta\\ &\leqslant C\int_t^{t+h}\left\|\left(\int_0^t(\eta-\sigma)^{\min\{-2,k-1\}}\|G(u(\sigma))\|^2_{L^0_{2,r-1+1/\rho}}\mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R})}\mathrm{d}\eta\\ &\leqslant Ch^{\min\{\frac{1}{2},\frac{k}{2}+1\}}\left(1+\|u\|_{L^\infty([0,T];L^p(\Omega,\dot{H}^{r-1+\frac{1}{\rho}}))}\right).\end{aligned}$$

式(6.1.27)得证. 最后注意到$\Phi_0(u)(0)=0$, 由式(6.1.27)可得式(6.1.28)的证明. 证毕. ¶

通过以上准备工作, 接下来我们给出随机积分微分方程(6.1.1)的温和解存在唯一性定理.

定理 6.1.2 *如果假设6.1.1 ~假设6.1.3成立. 设$p\geqslant 2, T>0$. 对所有的$s<r-1+\frac{2}{p}$, $k=(r-s-1)\rho$, 方程(6.1.1)存在唯一的温和解*

$$u\in C^{\min\{\frac{1}{2},\frac{k}{2}+1\}}([0,T];L^p(\Omega;\dot{H}^s)).$$

证明 下面分两步对此定理加以证明. 首先证明温和解的存在性和唯一性.

令$s:=r-1+1/\rho$. 对$T>0$, 定义

$$X_T:=\{u\in L^\infty([0,T];L^p(\Omega;\dot{H}^s)):u\text{是可料的}\}.$$

因为$\Phi_{u_0}(u)(t)=\Phi_0(u)(t)+S(t)u_0$, 由引理6.1.4的式(6.1.28)知, 若$u\in X_T$, 则$\Phi_{u_0}(u)\in X_T$. 对于某个$\alpha>0$, 在$X_T$上引进一个等价范数

$$\|u\|_{X_{T,\alpha}}:=\sup_{t\in[0,T]}(\mathrm{e}^{-\alpha t}\|u(t)\|_{L^p(\Omega;\dot{H}^s)}).$$

我们将说明对于合适的$\alpha>0$, Φ_{u_0}是X_T上关于范数$\|\cdot\|_{X_{T,\alpha}}$的压缩映射, 即存在$\alpha>0$使得

$$\|\Phi_{u_0}(u)-\Phi_{u_0}(v)\|_{X_{T,\alpha}}\leqslant K\|u-v\|_{X_{T,\alpha}}, K<1.$$

$$\begin{aligned}&\Phi_{u_0}(u)(t)-\Phi_{u_0}(v)(t)\\ =\ &\int_0^t S(t-\sigma)(F(u(\sigma))-F(v(\sigma)))\mathrm{d}\sigma+\int_0^t S(t-\sigma)(G(u(\sigma))-G(v(\sigma)))\mathrm{d}W(\sigma)\\ =:\ &I_1+I_2.\end{aligned}$$

令$1<\tilde{q}<2$固定, 设$\tilde{p}$使得$\frac{1}{\tilde{p}}+\frac{1}{\tilde{q}}=1$成立. 则由假设6.1.2, 式(6.1.19)及Hölder不等式有

$$\|I_1\|_{X_{T,\alpha}}\ \leqslant\ \sup_{t\in[0,T]}\|\int_0^t\mathrm{e}^{-\alpha(t-\sigma)}\mathrm{e}^{-\alpha\sigma}A^{\frac{1}{2\rho}}S(t-\sigma)A^{\frac{r-1}{2}}\times$$

$$
\begin{aligned}
& (F(u(\sigma))-F(v(\sigma)))\mathrm{d}\sigma\|_{L^p(\Omega;H)} \\
\leqslant\ & \sup_{t\in[0,T]} C\int_0^t \mathrm{e}^{-\alpha(t-\sigma)}(t-\sigma)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\sigma\|u-v\|_{X_{T,\alpha}} \\
\leqslant\ & C(\frac{1}{\alpha\tilde{p}})^{\frac{1}{\tilde{p}}}T^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{\tilde{q}}}\|u-v\|_{X_{T,\alpha}}.
\end{aligned}
$$

类似地, 设$\tilde{q}>1$使得$\tilde{q}s\rho<1$. 因为$r<1$, 有$s\rho=r\rho-\rho+1$. 设$\tilde{q}$使得$\frac{1}{\tilde{p}}+\frac{1}{\tilde{q}}=1$, 则由假设6.1.2, 式(6.1.19)及Hölder不等式有

$$
\begin{aligned}
\|I_2\|_{X_{T,\alpha}} \leqslant\ & \sup_{t\in[0,T]}\left\|\left(\int_0^t \mathrm{e}^{-\alpha(t-\sigma)}\mathrm{e}^{-\alpha\sigma}\|A^{\frac{s}{2}}S(t-\sigma)(G(u(\sigma))-G(v(\sigma)))\|^2_{L_2^0}\mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(\Omega)} \\
\leqslant\ & C\sup_{t\in[0,T]}\left(\int_0^t \mathrm{e}^{-\alpha(t-\sigma)}(t-\sigma)^{\min\{0,-s\rho\}}\mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{1}{2}}\|u-v\|_{X_{T,\alpha}} \\
\leqslant\ & C(\frac{1}{\alpha\tilde{p}})^{\frac{1}{\tilde{p}}}T^{\min\{\frac{1}{2},\frac{-\tilde{q}s\rho+1}{2}\}}\|u-v\|_{X_{T,\alpha}}.
\end{aligned}
$$

因此, 选择$\alpha>0$足够大, 则$\varPhi_{u_0}$是关于范数$\|\cdot\|_{X_{T,\alpha}}$的压缩映射, 因此由Banach不动点定理知存在唯一的解$u\in X_T$.

在证明的最后讨论方程(6.1.1)的温和解的正则性. 由引理6.1.4中的式(6.1.27)可知, 对于所有的$s<r-1+\frac{2}{p}$, $k=(r-s-1)\rho$, 有

$$
u\in C^{\min\{\frac{1}{2},\frac{k}{2}+1\}}([0,T];L^p(\Omega;\dot{H}^s)).
$$

证毕. ¶

6.2 空间半离散格式的误差估计

本节设b,F,G满足更强的假设条件, 即F,G满足全局Lipschitz条件下(详细见假设6.2.3和假设6.2.4), 给出随机积分微分方程(6.1.1)空间半离散格式的有限元误差估计.

假设 6.2.1 设$0\neq b\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$是3-单调的, 即$b,-\dot{b}$是非负、非增、凸的且满足$\lim\limits_{t\to\infty}b(t)=0$. 此外,

$$
\rho:=1+\frac{\pi}{2}\sup\{|\arg\hat{b}(\lambda)|,\mathrm{Re}\lambda>0\}\in(1,2). \tag{6.2.1}
$$

注 6.2.1 条件(6.2.1)等价于下式

$$
\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{t}\int_0^t sb(s)\mathrm{d}s}{\int_0^t -s\dot{b}(s)\mathrm{d}s}<+\infty. \tag{6.2.2}
$$

假设 6.2.2 b的Laplace变换$\hat{b}$可以延拓到扇形$\sum_\theta(\theta>\frac{\pi}{2})$内的解析函数且满足

$$
|\hat{b}^{(k)}(z)|\leqslant C|z|^{1-\rho-k}.
$$

假设 6.2.3 非线性算子$F: H \to H$且存在常数C, 使得

$$\|F(x) - F(y)\| \leqslant C\|x - y\|, \ \ \forall x, y \in H.$$

假设 6.2.4 非线性算子$G: H \to L_2^0$且存在常数C, 使得

$$\|G(x) - G(y)\|_{L_2^0} \leqslant C\|x - y\|, \ \ \forall x, y \in H.$$

此外, 下式成立

$$\|G(x)\|_{L_2^0} \leqslant C(1 + \|x\|).$$

假设 6.2.5 假设初始值u_0是$\dot{H}^{\frac{1}{\rho}}$-值$\mathcal{F}_0$可测的, 即$u_0 \in L_2(\Omega, \dot{H}^{\frac{1}{\rho}})$.

在假设6.2.1~假设6.2.5成立的条件下, 积分微分方程(6.1.1)存在唯一的温和解, 并且如下引理成立, 其证明可见参考文献[95].

引理 6.2.1 在假设6.2.1 ~假设6.2.5下, 方程(6.1.1)存在唯一的温和解u, 满足

$$\sup_{t \in [0,T]} E[\|u(t)\|^p] < \infty, \quad p \in [2, \infty). \tag{6.2.3}$$

此外有

$$(E[\|u(t_1) - u(t_2)\|^p])^{\frac{1}{p}} \leqslant C|t_1 - t_2|^{\frac{1}{2}}. \tag{6.2.4}$$

接下来讨论随机积分微分方程(6.1.1)的空间半离散格式的误差估计. 式(6.1.1)的半离散形式为

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}u_h + \left(A_h \int_0^t b(t-s) u_h(s) \mathrm{d}s\right) \mathrm{d}t = P_h F(u_h) \mathrm{d}t + P_h G(u_h) \mathrm{d}W, \quad t > 0, \\ &u_h(0) = P_h u_0. \end{aligned} \tag{6.2.5}$$

其弱解可表示为

$$u_h(t) = S_h(t) P_h u_0 + \int_0^t S_h(t-s) P_h F(u_h(s)) \mathrm{d}s + \int_0^t S_h(t-s) P_h G(u_h(s)) \mathrm{d}W, \tag{6.2.6}$$

其中预解系$\{S_h(t)\}_{t \geqslant 0}$可表示为

$$S_h(t) P_h u_0 = \sum_{k=1}^{+\infty} s_{h,k}(t)(u_0, e_{h,k}) e_{h,k}, \tag{6.2.7}$$

$\{\lambda_{h,k}, e_{h,k}\}$是$A_h$的特征对且$s_{h,k}(t)$是常微分方程

$$\begin{cases} \dot{s}_{h,k}(t) + \lambda_{h,k} \int_0^t b(t-s) s_{h,k}(s) \mathrm{d}s = 0, \\ s_{h,k}(0) = 1 \end{cases} \tag{6.2.8}$$

的解. 由式(6.2.7)定义的预解系$\{S_h(t)\}_{t \geqslant 0}$满足的光滑性质由如下三个引理给出, 详细证明见文献[96, 99, 100].

引理 6.2.2 假设卷积核b满足假设6.2.1和假设6.2.2, 则有

$$\|A_h^s S_h(t) P_h\|_{L(H)} \leqslant C t^{-s\rho}, t > 0, s \in [0, \frac{1}{\rho}], \tag{6.2.9}$$

$$\int_0^t \|A_h^{1/2\rho} S_h(s) P_h x\|^2 \mathrm{d}s \leqslant C\|x\|^2, t > 0, h > 0. \tag{6.2.10}$$

证明 式(6.2.9)和式(6.2.10)的证明过程分别类似于引理6.1.3中式(6.1.19)和式(6.1.22)的证明, 在此不再加以赘述. ¶

引理 6.2.3 假设卷积核b满足假设6.2.1和假设6.2.2, 则有

$$\|(S_h(t)P_h - S(t))u_0\| \leqslant Ch^2 \left(\|u_0\|_2 + \int_0^t \|u_t\|_2 \mathrm{d}s \right), t > 0. \tag{6.2.11}$$

下面引理考虑了齐次积分微分方程在初始值不光滑下的误差估计.

引理 6.2.4 假设卷积核b满足假设6.2.1和假设6.2.2, 则有

$$\|(S_h(t)P_h - S(t))u_0\| \leqslant Ch^2 t^{-\rho} \|u_0\|, t > 0. \tag{6.2.12}$$

如下引理给出了随机积分微分方程有限元半离散格式(6.2.5)相应的确定性齐次问题的误差估计.

引理 6.2.5 设$0 \leqslant v \leqslant \mu \leqslant 2$, $F_h(t) = S_h(t)P_h - S(t)$. 假设卷积核$b$满足假设6.2.1和假设6.2.2, 则存在常数$C$使得

$$\|F_h(t)x\| \leqslant Ch^{\mu} t^{-\rho\frac{\mu - v}{2}} \|x\|_v.$$

证明 由引理6.1.3中的式(6.1.19)和引理6.2.2中的式(6.2.9)可知, $v = \mu = 0$显然成立. 由引理6.2.4知, $v = 0$和$\mu = 2$的情况显然成立. 对于$v = \mu = 2$, 由引理6.2.3知

$$\|u_h(t) - u(t)\| \leqslant Ch^2 \{\|u_0\|_2 + \int_0^t \|u_t\|_2 \mathrm{d}s\}. \tag{6.2.13}$$

由于$u(t)$具有如下的光滑性质

$$\|u^{(m)}(t)\|_{\mu+v} \leqslant Ct^{-(\alpha+1)\mu - m} \|u_0\|_v, \tag{6.2.14}$$

其中$\|u_0\|_v = \|A^{v/2}u_0\|, t > 0$, 所以有$\|u_t\|_2 \leqslant Ct^{-1+\epsilon}\|u_0\|_2 (\epsilon > 0)$, 将其代入到式(6.2.13)证得$v = \mu = 2$成立. 综上由内插理论1.2.12得证. 证毕. ¶

通过以上准备工作, 下面给出随机积分微分方程有限元半离散格式(6.2.5)的误差估计.

定理 6.2.1 在假设6.2.1 ~假设6.2.5下, $\rho \in (1, 2)$, 则存在常数C, 使得

$$\|u_h(t) - u(t)\|_{L_2(\Omega, H)} \leqslant Ch^{\frac{1}{\rho}}.$$

证明 由式(6.2.6)和式(6.1.26)知,

$$\begin{aligned}
u_h(t)-u(t) &= (S_h(t)P_h-S(t))u_0+\\
&\quad \int_0^t (S_h(t-s)P_hF(u_h(s))-S(t-s)F(u(s)))\mathrm{d}s+\\
&\quad \int_0^t (S_h(t-s)P_hG(u_h(s))-S(t-s)G(u(s)))\mathrm{d}W(s)\\
&=: I+II+III.
\end{aligned} \tag{6.2.15}$$

在引理6.2.5中取$\mu=v=\frac{1}{\rho}$, 由假设6.2.5得,

$$\|I\|_{L_2(\Omega,H)}=\|(S_h(t)P_h-S(t))u_0\|_{L_2(\Omega,H)}\leqslant Ch^{\frac{1}{\rho}}\|u_0\|_{L_2(\Omega,\dot{H}^{\frac{1}{\rho}})}\leqslant Ch^{\frac{1}{\rho}}. \tag{6.2.16}$$

项II可由下面三部分来表示,

$$\begin{aligned}
II &= \int_0^t (S_h(t-s)P_h(F(u_h(s))-F(u(s)))\mathrm{d}s+\\
&\quad \int_0^t (S_h(t-s)P_h-S(t-s))(F(u(s))-F(u(t)))\mathrm{d}s+\\
&\quad \int_0^t (S_h(t-s)P_h-S(t-s))F(u(t)))\mathrm{d}s\\
&=: II_1+II_2+II_3.
\end{aligned}$$

下面依次估计每一项. 利用式(6.2.9)和假设6.2.3得,

$$\begin{aligned}
\|II_1\|_{L_2(\Omega,H)} &\leqslant \int_0^t \|S_h(t-s)P_h(F(u_h(s))-F(u(s)))\|_{L_2(\Omega,H)}\,\mathrm{d}s\\
&\leqslant C\int_0^t \|F(u_h(s))-F(u(s))\|_{L_2(\Omega,H)}\,\mathrm{d}s\\
&\leqslant C\int_0^t \|u_h(s)-u(s)\|_{L_2(\Omega,H)}\,\mathrm{d}s.
\end{aligned} \tag{6.2.17}$$

在引理6.2.5中取$\mu=\frac{1}{\rho}, v=0$, 由假设6.2.3和式(6.2.4)得,

$$\begin{aligned}
\|II_2\|_{L_2(\Omega,H)} &\leqslant \int_0^t \|(S_h(t-s)P_h-S(t-s))(F(u(s))-F(u(t)))\|_{L_2(\Omega,H)}\,\mathrm{d}s\\
&\leqslant C\int_0^t h^{\frac{1}{\rho}}(t-s)^{-\frac{1}{2}}\|F(u(s))-F(u(t))\|_{L_2(\Omega,H)}\,\mathrm{d}s\\
&\leqslant Ch^{\frac{1}{\rho}}\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}(t-s)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}s\\
&\leqslant Ch^{\frac{1}{\rho}}.
\end{aligned} \tag{6.2.18}$$

最后, 在引理6.2.5中取$\mu=\frac{1}{\rho}, v=0$, 由假设6.2.3和式(6.2.3), 得,

$$\|II_3\|_{L_2(\Omega,H)} \leqslant \int_0^t \|(S_h(t-s)P_h-S(t-s))F(u(t))\|_{L_2(\Omega,H)}\,\mathrm{d}s$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \quad Ch^{\frac{1}{\rho}}\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}s(\sup_{t\in[0,T]}\|u(t)\|_{L_2(\Omega,H)})\\
&\leqslant \quad Ch^{\frac{1}{\rho}}. \qquad (6.2.19)
\end{aligned}
$$

结合式(6.2.17), 式(6.2.18)和式(6.2.19), 得

$$
\|II\|_{L_2(\Omega,H)} \quad \leqslant \quad C\int_0^t \|u_h(s)-u(s)\|_{L_2(\Omega,H)}\,\mathrm{d}s + Ch^{\frac{1}{\rho}}. \qquad (6.2.20)
$$

项III的估计类似于项II. 先把项III分成三部分然后分别估计每一项.

$$
\begin{aligned}
III \quad &= \quad \int_0^t (S_h(t-s)P_h(G(u_h(s))-G(u(s)))\mathrm{d}W(s)+\\
&\quad\quad \int_0^t (S_h(t-s)P_h-S(t-s))\,(G(u(s))-G(u(t)))\,\mathrm{d}W(s)+\\
&\quad\quad \int_0^t (S_h(t-s)P_h-S(t-s))G(u(t))\mathrm{d}W(s)\\
&=: \quad III_1+III_2+III_3.
\end{aligned}
$$

对于项III_1, 由Itô等距性(1.5.40), 式(6.2.9)和假设6.2.4得,

$$
\begin{aligned}
\|III_1\|_{L_2(\Omega,H)} \quad &= \quad \left\|\left(\int_0^t \|S_h(t-s)P_h(G(u_h(s))-G(u(s))\|_{L_2^0}^2\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L_2(\Omega,\mathbb{R})}\\
&\leqslant \quad C\left\|\left(\int_0^t \|u_h(s)-u(s)\|^2\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L_2(\Omega,\mathbb{R})}\\
&\leqslant \quad C\left(\int_0^t \|u_h(s)-u(s)\|_{L_2(\Omega,H)}^2\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (6.2.21)
\end{aligned}
$$

类似于估计II_2的方法估计III_2, 利用引理6.2.5 (其中取$\mu=\frac{1}{\rho}, v=0$), 假设6.2.4和式(6.2.4), 以及Itô等距性(1.5.40), 得

$$
\begin{aligned}
\|III_2\|_{L_2(\Omega,H)} \quad &= \quad \left\|\left(\int_0^t \left\|F_h(t-s)(G(u_(s))-G(u(t))\right\|_{L_2^0}^2\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L_2(\Omega,\mathbb{R})}\\
&\leqslant \quad Ch^{\frac{1}{\rho}}\left\|\left(\int_0^t (t-s)^{-1}\|u(s)-u(t)\|^2\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L_2(\Omega,\mathbb{R})}\\
&\leqslant \quad Ch^{\frac{1}{\rho}}\left(\int_0^t (t-s)^{-1}(t-s)\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant Ch^{\frac{1}{\rho}}. \qquad (6.2.22)
\end{aligned}
$$

最后, 对于项III_3, 利用引理6.2.5 (其中取$\mu = \frac{1}{\rho}, v = 0$), 假设6.2.4, 式(6.2.3)和Itô等距性(1.5.40), 得

$$
\begin{aligned}
\|III_3\|_{L_2(\Omega,H)} \quad &= \quad \left\|\left(\int_0^t \|F_h(t-s)G(u(t))\|_{L_2^0}^2\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L_2(\Omega,\mathbb{R})}\\
&\leqslant \quad Ch^{\frac{1}{\rho}}\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}s(\sup_{t\in[0,T]}\|u(t)\|_{L_2(\Omega,H)}) \leqslant Ch^{\frac{1}{\rho}}. \qquad (6.2.23)
\end{aligned}
$$

结合式(6.2.21), 式(6.2.22)和式(6.2.23)有,

$$\|III\|_{L_2(\Omega,H)} \leqslant C\left(\int_0^t \|u_h(s)-u(s)\|^2_{L_2(\Omega,H)}\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}} + Ch^{\frac{1}{\rho}}. \tag{6.2.24}$$

将式(6.2.16), 式(6.2.20)和式(6.2.24)代入到式(6.2.15)有,

$$\begin{aligned}\|u_h-u\|_{L_2(\Omega,H)} \leqslant\ & Ch^{\frac{1}{\rho}} + C\int_0^t \|u_h(s)-u(s)\|_{L_2(\Omega,H)}\,\mathrm{d}s + \\ & C\left(\int_0^t \|u_h(s)-u(s)\|^2_{L_2(\Omega,H)}\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

利用Gronwall's引理1.2.3得,

$$\|u_h-u\|_{L_2(\Omega,H)} \leqslant Ch^{\frac{1}{\rho}},$$

定理得证. ¶

6.3 全离散格式的有限元误差估计

本节讨论随机积分微分方程(6.1.1)的全离散格式的有限元误差估计. 时间上的离散主要通过古典的Euler格式. 设k是时间步长, $\Delta t>0$且设$t_n=n\Delta t=nk$ (其中$n\geqslant 0$). 利用

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\omega_k z^k = \hat{b}\left(\frac{1-z}{\Delta t}\right), \quad |z|<1,$$

定义$u(t_n)$的近似$u_{n,h}$为

$$\begin{aligned}& u_{n,h}-u_{n-1,h}+\Delta t\left(\sum_{k=1}^{n}\omega_{n-k}A_h u_{k,h}\right) \\ =\ & P_hF(u_{n,h})\Delta t + P_hG(u_{n,h})(W^Q(t_n)-W^Q(t_{n-1})), \quad n\geqslant 1,\end{aligned} \tag{6.3.1}$$

其中$u_{0,h}=P_hu_0$.

接下来推导式(6.3.1)的全离散公式. 首先考虑确定形式

$$\begin{aligned}& u_{n,h}-u_{n-1,h}+\Delta t\left(\sum_{k=1}^{n}\omega_{n-k}A_h u_{k,h}\right)=0, \quad n\geqslant 1, \\ & u_{0,h}=x.\end{aligned} \tag{6.3.2}$$

取z-变换, 记

$$\hat{U}(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}u_{k,h}z^k, \qquad \hat{\omega}(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\omega_k z^k,$$

有

$$\hat{U}(z)-x-z\hat{U}(z)+\Delta t\hat{\omega}(z)A(\hat{U}(z)-x)=0.$$

整理得,

$$\hat{U}(z)=(I+\Delta t\hat{\omega}(z)A)((1-z)I+\Delta t\hat{\omega}(z)A)^{-1}x:=\hat{B}(z)x,$$

其中

$$\hat{B}(z)x=\sum_{k=0}^{\infty}B_{k,h}xz^k.$$

即$u_{k,h}=B_{k,h}x$, $k=0,1,\cdots$, 注意到$B_0=\hat{B}(0)=I$. $\hat{B}(z)x$可写为

$$\begin{aligned}\hat{B}(z)x &= ((1-z)I+\Delta t\hat{\omega}(z)A)^{-1}(I+\Delta t\hat{\omega}(z)A)\\ &= ((1-z)I+\Delta t\hat{\omega}(z)A)^{-1}x+\Delta t\hat{\omega}(z)A((1-z)I+\Delta t\hat{\omega}(z)A)^{-1}x\\ &= ((1-z)I+\Delta t\hat{\omega}(z)A)^{-1}x-(1-z)((1-z)I+\Delta t\hat{\omega}(z)A)^{-1}x+x\\ &= (z((1-z)I+\Delta t\hat{\omega}(z)A)^{-1}+I)x. \end{aligned}\tag{6.3.3}$$

下面考虑随机情况式(6.3.1), 取z-变换, 利用符号$w_n=W^Q(t_n)-W^Q(t_{n-1})$ (其中$n\geqslant 1$, $w_0=0$) 有,

$$\hat{F}(u)=\sum_{k=1}^{\infty}F(u_{k-1,h})z^{k-1},\quad \hat{G}(u)=\sum_{k=1}^{\infty}G(u_{k-1,h})z^{k-1}.$$

由于

$$\hat{U}(z)-x-z\hat{U}(z)+\Delta t\hat{\omega}(z)A(\hat{U}(z)-x)=\Delta tz\hat{F}(u)+\sum_{k=1}^{\infty}G(u_{k-1,h})w_kz^k,$$

所以

$$\begin{aligned}\hat{U}(z) &= \hat{B}(z)x+\frac{\hat{B}(z)-I}{z}\left(\Delta tz\hat{F}(u)+\sum_{k=1}^{\infty}G(u_{k-1,h})w_kz^k\right)\\ &= \hat{B}(z)x+\Delta t\hat{B}(z)\hat{F}(u)+\frac{1}{z}\hat{B}(z)\sum_{k=1}^{\infty}G(u_{k-1,h})w_kz^k-\Delta t\hat{F}(u)-\\ &\quad\ \frac{1}{z}\sum_{k=1}^{\infty}G(u_{k-1,h})w_kz^k,\end{aligned}$$

将式(6.3.3)代入上式, 由此得到,

$$u_{n,h}=B_{n,h}P_hu_0+k\sum_{j=0}^{n-1}B_{n-j,h}P_hF(u_{j,h})+\sum_{j=0}^{n-1}B_{n-j,h}P_hG(u_{j,h})\Delta W_{j+1}^Q,\tag{6.3.4}$$

其中

$$B_{n-j,h}P_hx=\int_0^{\infty}S_h(\Delta ts)P_hx\frac{\mathrm{e}^{-s}s^{j-1}}{(j-1)!}\mathrm{d}s,j\geqslant 1.\tag{6.3.5}$$

引理 6.3.1 如果b满足假设6.2.1和假设6.2.2, 则对于$C>0$, 成立

$$\|A_h^{\frac{v}{2}}B_{n,h}P_h\|\leqslant Ct_k^{-\frac{\rho\nu}{2}},\quad 0\leqslant\nu\leqslant\frac{1}{\rho},\quad k\geqslant 1,h>0.$$

证明 由式(6.2.9)(取$s=0$)和式(6.3.5)知,

$$\|B_{n,h}\| \leqslant C, n \geqslant 1, h>0. \tag{6.3.6}$$

由式(6.2.9)(取$s=1/\rho$)和式(6.3.5)知, 对于$n\geqslant 2$和$h>0$有

$$\begin{aligned}
\|A_h^{1/\rho}B_{n,h}P_hx\| &\leqslant C\|x\|(\Delta t)^{-1}\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-s}s^{j-2}}{(j-1)!}\mathrm{d}s \\
&= C\|x\|((j-1)\Delta t)^{-1}\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-s}s^{j-2}}{(j-2)!}\mathrm{d}s \\
&= C\|x\|t_{j-1}^{-1} = C\|x\|\frac{j}{j-1}t_j^{-1} \leqslant C\|x\|t_j^{-1}.
\end{aligned}$$

对于$k=1$, 由Hölder不等式和式(6.2.10)有

$$\begin{aligned}
\|A_h^{1/2\rho}B_{1,h}P_hx\| &\leqslant \int_0^\infty \|A_h^{1/2\rho}S_h(\Delta ts)x\|\mathrm{e}^{-s}\mathrm{d}s \\
&\leqslant C\left(\int_0^\infty \|A_h^{1/2\rho}S_h(\Delta ts)P_hx\|^2\right)^{1/2} \\
&\leqslant C(\Delta t)^{-1/2}\|x\|.
\end{aligned} \tag{6.3.7}$$

对式(6.3.6)和式(6.3.7)应用内插定理1.2.12即可. 证毕. ¶

下面是预解系$\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$在形式上类似于Hölder类型的一个估计.

引理 6.3.2 如果b满足假设6.2.1, 则存在常数$C=C(T,\gamma)>0$, 使得对于所有$\gamma<\frac{\rho s}{2}$,

$$\left(\sum_{k=1}^n\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|S(t_n-s)-S(t_n-t_{k-1})x\|^2\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant C\Delta t^\gamma\|x\|_{s-\frac{1}{\rho}}, \quad n\Delta t=T,$$

其中$0<s\leqslant\frac{1}{\rho}$.

证明 由引理6.1.3中的式(6.1.19)和式(6.1.22)知, 存在常数$C=C(\varepsilon,T)$使得对$0<\varepsilon\leqslant\frac{1}{\rho}$, 有

$$\left(\sum_{k=1}^n\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|(S(t_n-s)-S(t_n-t_{k-1}))x\|^2\mathrm{d}s\right)^{1/2} \leqslant C\|x\|_{\varepsilon-\frac{1}{\rho}}, n\Delta t=t_n=T.$$

由引理6.1.2得

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^n\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|(S(t_n-s)-S(t_n-t_{k-1}))x\|^2\mathrm{d}s \\
= &\sum_{i=1}^\infty(x,e_i)^2\sum_{k=1}^n\int_{t_{k-1}}^{t_k}(s_i(t_n-s)-s_i(t_n-t_{k-1}))^2\mathrm{d}s \\
\leqslant &\ 2\sum_{i=1}^\infty(x,e_i)^2\sum_{k=1}^n\int_{t_{k-1}}^{t_k}|(s_i(t_n-s)-s_i(t_n-t_{k-1}))|\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \quad 2\sum_{i=1}^{\infty}(x,e_i)^2\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{t_n-s}^{t_n-t_{k-1}}|\dot{s}_i(t)|\mathrm{d}t\mathrm{d}s \\
&\leqslant \quad 2\sum_{i=1}^{\infty}(x,e_i)^2\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{t_n-t_k}^{t_n-t_{k-1}}|\dot{s}_i(t)|\mathrm{d}t\mathrm{d}s \\
&\leqslant \quad 2\Delta t\|x\|^2\sup_{i\geqslant 1}\|\dot{s}_i\|_{L^1(\mathbb{R}_+)}\leqslant C\Delta t\|x\|^2.
\end{aligned}
$$

根据插值定理1.2.12得证. 证毕. ¶

下面这个引理考虑了齐次积分微分方程在初始值不光滑下的全离散格式的误差估计, 其证明见文献[100].

引理 6.3.3 假设卷积核b满足假设6.2.1和假设6.2.2, 则有

$$
\|(B_{n,h}P_h - S_h(t))u_0\| \leqslant Ckt^{-1}\|u_0\|, t>0. \tag{6.3.8}
$$

如下引理是随机积分微分方程(6.1.1)相应的确定性齐次积分微分方程的全离散格式误差估计.

引理 6.3.4 设$0\leqslant v\leqslant \mu\leqslant 2$, $F_{n,h}(t)=B_{n,h}P_h - S(t)$. 则存在常数$C$使得

$$
\|F_{n,h}(t)x\|\leqslant C(h^{\mu}t^{-\rho\frac{\mu-v}{2}}+k^{\frac{\mu}{2}}t^{-\frac{\mu-v}{2}})\|x\|_v.
$$

证明 由引理6.1.3的式(6.1.19)和引理6.3.1知, 情况$v=\mu=0$成立. 对于$v=0,\mu=2$, 结合引理6.3.3和引理6.2.5有,

$$
\begin{aligned}
\|B_{n,h}P_h x - S(t)x\| &\leqslant \|B_{n,h}P_h x - S_h(t)x\| + \|S_h(t)x - S(t)x\| \\
&\leqslant Ckt^{-1}\|x\| + Ch^2t^{-\rho}\|x\|.
\end{aligned}
$$

对于情况$v=2,\mu=2$, 利用文献[96]中的注5.3, 得到确定估计

$$
\|B_{n,h}P_h x - S(t)x\|\leqslant C(h^2+k)\left(\|x\|_2+\int_0^t\|\dot{S}(s)x\|_2\mathrm{d}s+\int_0^t\|\ddot{S}(s)x\|\mathrm{d}s\right). \tag{6.3.9}
$$

如果$x\in\mathcal{D}$, 则$u(t)=S(t)x$是式(6.1.12)的强解. 由于

$$
\int_0^t\|\ddot{S}(s)x\|\mathrm{d}s\leqslant C\left(\int_0^t\|\dot{S}(s)x\|_2\mathrm{d}s+\|x\|_2\right)
$$

成立. 在式(6.2.14)中取$m=1,\mu=0,v=2$得, $\|\dot{S}(s)x\|_2\leqslant Ct^{-1+\epsilon}\|x\|_2$(其中$\epsilon>0$), 然后代入到式(6.3.9), 得证. 综上由内插定理1.2.12, 引理得证. ¶

基于以上准备工作, 下面给出随机积分微分方程(6.1.1)的全离散格式的误差估计, 其结果形式上类似于定理6.2.1.

定理 6.3.1 在假设6.2.1 ~假设6.2.5下, 其中$\rho\in(1,2)$, 则存在常数C使得

$$
\|u_{n,h}-u(t_n)\|_{L_2(\Omega,H)}\leqslant C(h^{\frac{1}{\rho}}+k^{\frac{1}{2\rho}}).
$$

证明 记$e^n = u_{n,h} - u(t_n)$, 由式(6.3.4)和式(6.1.26)得,

$$
\begin{aligned}
e^n &= (B_{n,h}P_h - S(t_n))u_0 + \\
& (k\sum_{j=0}^{n-1} B_{n-j,h}P_hF(u_{j,h}) - \int_0^{t_n} S(t_n-s)F(u(s))\mathrm{d}s) + \\
& (\sum_{j=0}^{n-1} B_{n-j,h}G(u_{j,h})\Delta W_{j+1}^Q - \int_0^{t_n} S(t_n-s)G(u(s))\mathrm{d}W) \\
&=: e_1+e_2+e_3.
\end{aligned} \tag{6.3.10}
$$

由三角不等式得,

$$
\|e^n\|_{L_2(\Omega,H)} \leqslant 3\|e_1\|_{L_2(\Omega,H)} + 3\|e_2\|_{L_2(\Omega,H)} + 3\|e_3\|_{L_2(\Omega,H)}. \tag{6.3.11}
$$

注意到项e_1, e_2和e_3以及定理6.2.1的证明过程中项I, II和III具有相同的结构, 下面依次估计每一项. 对于项e_1, 应用引理6.3.4 (其中$\mu = v = \frac{1}{\rho}$) 和假设6.2.5得,

$$
\begin{aligned}
\|e_1\|_{L_2(\Omega,H)} &= \|(B_{n,h}P_h - S(t_n))u_0\|_{L_2(\Omega,H)} \\
\leqslant \quad & C(h^{\frac{1}{\rho}} + k^{\frac{1}{2\rho}})\|u_0\|_{L_2(\Omega,H^{\frac{1}{\rho}})} \leqslant C(h^{\frac{1}{\rho}} + k^{\frac{1}{2\rho}}).
\end{aligned} \tag{6.3.12}
$$

项e_2被分成下列项,

$$
\begin{aligned}
e_2 &= k\sum_{j=0}^{n-1} B_{n-j,h}P_hF(u_{j,h}) - \int_0^{t_n} S(t_n-s)F(u(s))\mathrm{d}s \\
&= \sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j} B_{n-j+1,h}P_hF(u_{j-1,h})\mathrm{d}s - \sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j} S(t_n-s)F(u(s))\mathrm{d}s \\
&= \sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j} (B_{n-j+1,h}P_h(F(u_{j-1,h}) - F(u(s)) + \\
& (B_{n-j+1,h}P_h - S(t_n-t_{j-1}))F(u(s)) + (S(t_n-t_{j-1}) - S(t_n-s))F(u(s))\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

由三角不等式得,

$$
\begin{aligned}
\|e_2\|_{L_2(\Omega,H)} &\leqslant \|\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j} B_{n-j+1,h}P_h(F(u_{j-1,h}) - F(u(s))\mathrm{d}s\|_{L_2(\Omega,H)} + \\
& \|\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j} (B_{n-j+1,h}P_h - S(t_n-t_{j-1}))F(u(s))\mathrm{d}s\|_{L_2(\Omega,H)} + \\
& \|\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j} (S(t_n-t_{j-1}) - S(t_n-s))F(u(s))\mathrm{d}s\|_{L_2(\Omega,H)} \\
&=: e_{21}+e_{22}+e_{23}.
\end{aligned}
$$

对于项e_{21}, 由引理6.3.1 (其中取$v=0$), 假设6.2.3, 三角不等式和式(6.2.4)得,

$$
e_{21} = \|\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j} B_{n-j+1,h}P_h(F(u_{j-1,h}) - F(u(s))\mathrm{d}s\|_{L_2(\Omega,H)}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant C\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\|u_{j-1,h}-u(s)\|_{L_2(\Omega,H)}\mathrm{d}s\\
&\leqslant C\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left(\|u(t_{j-1})-u(s)\|_{L_2(\Omega,H)}+\|u_{j-1,h}-u(t_{j-1})\|_{L_2(\Omega,H)}\right)\mathrm{d}s\\
&\leqslant C\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(s-t_{j-1})^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}s+Ck\sum_{j=1}^{n}\|e^j\|^2\\
&\leqslant Ck^{\frac{1}{2}}+Ck\sum_{j=1}^{n}\|e^j\|^2. \qquad (6.3.13)
\end{aligned}
$$

对于e_{22}的估计, 应用引理6.3.4 (其中取$\mu=\frac{1}{\rho},v=0$) 和式(6.2.3)得,

$$
\begin{aligned}
e_{22}&\leqslant \sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\|(B_{n-j+1,h}P_h-S(t_n-t_{j-1}))F(u(s))\|_{L_2(\Omega,H)}\mathrm{d}s\\
&\leqslant C\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(h^{\frac{1}{\rho}}((n-j+1)\Delta t)^{-\frac{1}{2}}+k^{\frac{1}{2\rho}}((n-j+1)\Delta t)^{-\frac{1}{2\rho}})\mathrm{d}s\\
&\leqslant C(h^{\frac{1}{\rho}}+k^{\frac{1}{2\rho}}). \qquad (6.3.14)
\end{aligned}
$$

对于项e_{23}, 应用引理6.3.2 (其中取$s=\frac{1}{\rho}$) 和式(6.2.3)得,

$$
e_{23}\leqslant \sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\|(S(t_n-t_{j-1})-S(t_n-s))F(u(s))\|_{L_2(\Omega,H)}\mathrm{d}s\leqslant Ck^{\frac{1}{2}}. \qquad (6.3.15)
$$

结合式(6.3.13), 式(6.3.14)和式(6.3.15)有,

$$
\|e_2\|_{L_2(\Omega,H)}\leqslant Ck^{\frac{1}{2}}+Ck\sum_{j=1}^{n}\|e^j\|^2+C(h^{\frac{1}{\rho}}+k^{\frac{1}{2\rho}}). \qquad (6.3.16)
$$

对于项e_3有,

$$
\begin{aligned}
e_3&=\sum_{j=0}^{n-1}B_{n-j,h}P_hG(u_{j,h})\Delta W_{j+1}^{Q}-\int_0^{t_n}S(t_n-s)G(u(s))\mathrm{d}W\\
&=\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}B_{n-j+1,h}P_hG(u_{j-1,h})\mathrm{d}W-\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}S(t_n-s)G(u(s))\mathrm{d}W\\
&=\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left(B_{n-j+1,h}P_hG(u_{j-1,h})-S(t_n-s)G(u(s))\right)\mathrm{d}W\\
&=\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(B_{n-j+1,h}P_h(G(u_{j-1,h})-G(u(s)))+\\
&\quad(B_{n-j+1,h}P_h-S(t_n-t_{j-1}))G(u(s))+(S(t_n-t_{j-1})-S(t_n-s))G(u(s)))\mathrm{d}W.
\end{aligned}
$$

由三角不等式和Itô等距性(1.5.40)有,

$$
\|e_3\|_{L_2(\Omega,H)}\leqslant \|(\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\|B_{n-j+1,h}P_h(G(u_{j-1,h})-G(u(s)))\|_{L_2^0}^2\mathrm{d}s)^{\frac{1}{2}}\|_{L_2(\Omega,\mathbb{R})}+
$$

$$
\begin{aligned}
& \|(\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\|(B_{n-j+1,h}P_h-S(t_n-t_{j-1}))G(u(s))\|_{L_2^0}^2\mathrm{d}s)^{\frac{1}{2}}\|_{L_2(\Omega,\mathbb{R})}+\\
& \|(\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\|(S(t_n-t_{j-1})-S(t_n-s))G(u(s))\|_{L_2^0}^2\mathrm{d}s)^{\frac{1}{2}}\|_{L_2(\Omega,\mathbb{R})}\\
=: \ & e_{31}+e_{32}+e_{33}.
\end{aligned}
$$

下面分别估计项e_{31}, e_{32}和e_{33}. 对于项e_{31}, 类似于项e_{21}的估计, 应用引理6.3.1(其中取$v=0$), 假设6.2.4, 三角不等式和式(6.2.4)得,

$$
\begin{aligned}
e_{31} &= \|(\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\|B_{n-j+1,h}P_h(G(u_{j-1,h})-G(u(s)))\|_{L_2^0}^2\mathrm{d}s)^{\frac{1}{2}}\|_{L_2(\Omega,\mathbb{R})}\\
&\leqslant C\|(\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\|u_{j-1,h}-u(s)\|^2\mathrm{d}s)^{\frac{1}{2}}\|_{L_2(\Omega,\mathbb{R})}\\
&\leqslant C\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\|u_{j-1,h}-u(s)\|_{L_2(\Omega,H)}\mathrm{d}s\leqslant Ck^{\frac{1}{2}}+Ck\sum_{j=1}^{n}\|e^j\|^2. \qquad (6.3.17)
\end{aligned}
$$

对于e_{32}, 应用引理6.3.4 (其中取$\mu=v=\frac{1}{\rho}$), 假设6.2.4和式(6.2.3)得,

$$
\begin{aligned}
e_{32} &= \|(\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\|(B_{n-j+1,h}P_h-S(t_n-t_{j-1}))G(u(s))\|_{L_2^0}^2\mathrm{d}s)^{\frac{1}{2}}\|_{L_2(\Omega,\mathbb{R})}\\
&\leqslant C(h^{\frac{1}{\rho}}+k^{\frac{1}{2\rho}}). \qquad (6.3.18)
\end{aligned}
$$

对于e_{33}, 应用引理6.3.2 (其中取$s=\frac{1}{\rho}$), 假设6.2.4和式(6.2.3)得,

$$
\begin{aligned}
e_{33} &= \|(\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\|(S(t_n-t_{j-1})-S(t_n-s))G(u(s))\|_{L_2^0}^2\mathrm{d}s)^{\frac{1}{2}}\|_{L_2(\Omega,\mathbb{R})}\\
&\leqslant Ck^{\frac{1}{2}}(\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\|(1+\sup_{s\in[0,T]}\|u(s)\|_{L_2(\omega,H)})\|_{L_2^0}^2\mathrm{d}s)_{L_2(\Omega,\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant Ck. \qquad (6.3.19)
\end{aligned}
$$

由式(6.3.17), 式(6.3.18)和式(6.3.19)有,

$$
\|e_3\|_{L_2(\Omega,H)}\leqslant Ck^{\frac{1}{2}}+Ck\sum_{j=1}^{n}\|e^j\|^2+C(h^{\frac{1}{\rho}}+k^{\frac{1}{2\rho}})+Ck. \qquad (6.3.20)
$$

将式(6.3.12), 式(6.3.16)和式(6.3.20)代入到式(6.3.11)得,

$$
\|e^n\|_{L_2(\Omega,H)}\leqslant C(h^{\frac{1}{\rho}}+k^{\frac{1}{2\rho}})+Ck^{\frac{1}{2}}+Ck\sum_{j=1}^{n}\|e^j\|^2+Ck.
$$

应用离散的Gronwall's引理1.2.3有,

$$
\|u_{n,h}-u(t_n)\|_{L_2(\Omega,H)}\leqslant C(h^{\frac{1}{\rho}}+k^{\frac{1}{2\rho}}).
$$

证毕. ¶

注 6.3.1 当$F=0, G=1$时, 在文献[96]中, 作者讨论了随机积分微分方程(6.1.1)的强收敛误差估计, 在分析相应的确定性方程的误差估计时是在初始值光滑的条件下得到的. 我们在此基础上讨论了更为广泛的一类由可乘噪声驱动的非线性随机积分微分方程的半离散和全离散的误差估计, 其困难之处在于初始值不光滑时, 需要得到相应的确定性方程的误差估计. 引理6.2.5和引理6.3.4分别把初始值光滑时得到的确定性方程的误差估计延拓到了初始值不光滑时确定性方程的误差估计, 并且得到的半离散的误差估计要更好一些.

6.4 研究进展评述

确定积分微分方程的数值方法研究成果已经非常丰富[99, 101–106], 但对于随机积分微分方程的有限元研究很少涉及.

(1) 在文献[96]中, M. Kovács研究了如下随机积分微分方程

$$\mathrm{d}u+\left(\int_0^t b(t-s)Au(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t=\mathrm{d}W^Q, t\in(0,T]; u(0)=u_0\in H,$$

的全离散有限元强收敛误差估计, 其中W^Q是Q-Wiener过程. 空间上采用标准的连续的有限元方法, 时间上采用隐式Euler格式.

(2) 在文献[97]中, M. Kovács研究了如下随机积分微分方程

$$\mathrm{d}X(t)+\left(\int_0^t b(t-s)AX(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t=\mathrm{d}W^Q, t\in(0,T]; X(0)=X_0\in H,$$

的全离散有限元弱收敛误差估计, 其中W^Q是Q-Wiener过程. 空间上采用标准的连续的有限元方法, 时间上采用隐式Euler格式. 弱收敛率是强收敛率的两倍.

(3)在文献[98]中, A. Adam研究了如下半线性随机Volterra积分微分方程

$$\mathrm{d}X_t+\left(\int_0^t b_{t-s}AX_s\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t=F(X_t)\mathrm{d}t+\mathrm{d}W_t, t\in[0,T], X_0=x_0, \tag{6.4.1}$$

的弱误差估计. 空间上采用标准的有限元法, 时间上采用隐含的Euler方法, 证得弱收敛率是强收敛率的两倍.

参考文献

[1] 张恭庆, 林源渠. 泛函分析讲义(上). 北京大学出版社, 北京, 1986.

[2] 郭大均. 非线性泛函分析. 山东科学技术出版社, 济南, 1985.

[3] Prato G D, Zabczyk J. Stochastic equations in infinite dimensions, encyclopedia of mathematics and its application. Cambridge Univercity Press, 1992.

[4] Adams R A. Sobolev Spaces. Academic Press, New York, 1975.

[5] 王烈衡, 许学军. 有限元方法的数学基础. 科学出版社, 北京, 2004.

[6] Brenner S C, Scott L R. The Mathematical Theory of Finite Element Methods. Springer-Verlag, New York, 1994.

[7] Teman. Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. 2nd Edition. Springer, Berlin, 1997.

[8] Pazy A. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. Springer-Verlag, New York, 1983.

[9] 周鸿兴, 王连文. 线性算子半群理论及应用. 山东科学技术出版社, 济南, 1994.

[10] Thom*é*e V. Galerkin finite element methods for parabolic problems. Springer Series in Computational Mathematics, 1997.

[11] Edward P.C.Kao. 随机过程导论(英文版). 机械工业出版社, 北京, 2003.

[12] Klebaner F C. Introduction to Stochastic Calculus with Applications. Impericla College Press, London, 1998.

[13] Yan Y. Semidiscrete galerkin approximation for a linear stochastic parabolic partial differential equation driven by an additive noise. BIT Numer. Math., 2004, 44: 829–847.

[14] Yan Y. Galerkin finite element methods for stochastic parabolic partial differential equations. SIAM J. Numer Anal., 2005, 43: 1363–1384.

[15] Kruse R, Larsson S. Optimal regularity for semilinear stochastic partial differential equations with multiplicative noise. Electron. J. Probab., 2012, 65: 1–19.

[16] Henry D. Geometric theory of semilinear parabolic equations. Volume 840 of Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1981.

[17] Ciarlet P G, Lions J L. Hand Book of Numerical Analysis Volume II, Finite Element Methods. Elsevier science publishers B.V.(North Holland) 1991.

[18] Allen E J, Novosel S J, Zhang Z M. Finite element and difference approximation of some linear stochastic partial differential equations. Stoch. Stoch. Rep., 1998, 64(1-2): 117–142.

[19] Walsh J B. Finite element methods for parabolic stochastic PDE'S. Poten. Anal., 2005, 23: 1–43.

[20] Du Q, Zhang T. Numerical approximation of some linear stochastic partial differential equations driven by special additive noise. SIAM J. Numer. Anal., 2002, 40: 1421–1445.

[21] Georgios T K, Georgios E Z. Fully-discrete finite element approximations for a fourth-order linear stochastic parabolic equation with additive space-time white noise. Esaim-math. Model. Num., 2010, 44: 289–322.

[22] Lord G J, Tambue A. A modified semi-implict Euler-Maruyama scheme for finite element discretization of SPDEs with additive noise. arXiv:1004.1998v2.

[23] Barth A. A finite element method for Martingale-driven stochastic partial differential equaitons. Commun. Stoch. Anal., 2010, 4(3): 355–375.

[24] Jentzen A, Röckner M. Regularity analysis for stochastic partial differential equations with nonlinear multiplicative trace class noise. J Differ. Equations, 2012, 252: 114–136.

[25] Kloeden P E, Lordb G J, Neuenkirchc A, Shardlow T. The exponential integrator scheme for stochastic partial differential equations: Pathwise error bounds. J. Comput. Appl. Math., 2011, 235(5): 1245–1260.

[26] Kov*á*cs M, Larsson S, Lindgren F. Strong convergence of the finite element method with truncated noise for semilinear parabolic stochastic equations. Numer. Algor., 2010, 53: 309–320.

[27] Kruse R. Optimal error estimates of Galerkin finite element methods for stochastic partial differential equations with multiplicative noise. arXiv:1103.4504v1.

[28] Lord J G. Stochastic exponential integrators for the finite element discretization of SPDEs for multiplicative and additive noise. IMA J. Numer. Anal., http://imajna.oxfordjournals.org/content/early/2012/07/31/imanum.drr059.abstract.

[29] Kruse R. Strong and Weak Approximation of Semilinear Stochastic Evolution Equations. Lecture Notes in Mathematics, vol. 2093, Springer, 2014.

[30] Debussche A, Printems J. Weak order for the discretization of the stochastic heat equation. Math. Comp., 2009, 78: 845–863.

[31] Geissert M, Kov*á*cs M, Larsson S. Rate of weak convergence of the finite element method for the stochastic heat equation with additive noise. BIT, 2009, 49: 343–356.

[32] Debussche A. Weak approximation of stochastic partial differential equations: the nonlinear case. Math. Comp., 2011, 80: 89–117.

[33] Andersson A, Larrson S. Weak convergence for a spatial approximation of the nonliear stochastic heat equation. arXiv:1212.5564v1.

[34] Kovacs M, Larsson S, Lindgren F. Weak convergence of finite element approximations of linear stochastic evolution equations with additive noise II. Fully discrete schemes. BIT, 2013, 53(2): 497–525.

[35] Lindner F, Schilling R L. Weak order for the discretization of the stochastic heat equation driven by impulsive noise. Potential Analysis, 2013, 38(2): 345–379.

[36] Wang X, Gan S. Weak convergence analysis of the linear implicit euler method for semilinear stochastic partial differential equations with additive noise. J. Math. Anal. Appl., 2013, 398(1): 151–169.

[37] Wang X. Weak error estimates of the exponential Euler scheme for semi-linear SPDEs without Malliavin calculus. arXiv preprint arxiv:1408.0713v1 (2014).

[38] Capinski M, Peszat S. On the existence of solution to stochastic Navier-Stokes equations. Nonlinear Anal. TMA., 2001, 44(2), 141–177.

[39] Jose A Langa, Jose Real, Jacques Simon. Existence and Regularity of the Pressure for the Stochastic Navier-Stokes Equations. Applied Mathematics and Optimization, 2003, 48(3): 195–210.

[40] Chrysafinos K, Hou L S. Error estimates for semidiscrete finite element approximations of linear and semilinear parabolic equations under minimal regularity assumptions. SIAM J. Numer. Anal., 2002, 40(1): 282–306.

[41] Carstensen C. Quasi-interpolation and a Posteriori Error Analysis in Finite Element Method. RAIRO Model. Math. Anal. Numer., 1999, 33(6): 1187–1202.

[42] Carstensen C, Wenbin Liu, Ningning Yan. A Posteriori Error Estimates for Finite Element Approximation of Parabolic p-Laplacian. SIAM J. Numer. Anal., 2006, 43(6): 2294–2319.

[43] Barrett J W, Liu W B. Quasi-norm error bounds for the finite elementapproximation of a non-Newtonian flow. Numer. Math., 1994, 68(4): 437–456.

[44] Liu Wenbin, Yan Ningning. Quasi-norm a Priori and a Posteriori Error Estimates for the Nonconforming Approximation of p-Laplacian. Numer. Math., 2001, 89(2): 341–378.

[45] Liu Wenbin, Yan Ningning. Quasi-norm local error estimates for p-Laplacian. SIAM J. Numer. Anal., 2002, 39(1): 100–127.

[46] Ern A, Proft J. A posteriori discontinuous Galerkin error estimates for transient convection-diffusion equations. Appl. Math. Lett., 2005, 18: 833–841.

[47] Frutos J, Archilla B G, Novo J. A posteriori error estimates for fully discrete nonlinear parabolic problems. Comput. Methods Mech. Eng., 2007, 196: 3462–3474.

[48] Ku J. A posteriori error estimates for the primary and dual variables for the div first-order least-squares finite element method. Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 2011, 200: 830–836.

[49] Paul H, Schӧtzau D, Wihler T P. Energy norm shape a posteriori error estimation for mixed discontinuous Galerkin approximations of the Stokes problem. J. Sci. Comput., 2005, 22-23: 347–370.

[50] Yang X, Qi R, Duan Y. A posteriori analysis of finite element discretizations of stochastic partial differential delay equations. J. Diff. Equt. Appl., 2012, 18(10): 1649–1663.

[51] Yang X, Duan Y, Guo Y. A posteriori error estimates for finite element approximation of unsteady incompressible stochastic Navier-Stokes equations. SIAM J. Numer. Anal., 2010, 48(4): 1579–1600.

[52] Duan Y, Yang X. The finite element method of a Euler scheme for stochastic Navier-Stokes equations involving the turbulent component. Int. J. Num. Ana. Model., 2013, 10(3): 727 – 744.

[53] Liu Y, Li H, He S, Gao W, Fang Z. A C1-conforming finite element method for nonlinear fourth-order hyperbolic equation. Int. J. Engin. Natur. Scien., 2011, 5(4): 234–238.

[54] Kossioris G T, Zouraris G E. Finite Element Approximations for a linear Cahn-Hilliard-Cook equation driven by the space derivative of a space-time white noise. http://128.84.158.119/abs/1205.4314.

[55] Cohen D, Larrson S, Sigg M. A trigonometric method for the linear stochastic wave equation. arXiv:1203.3668v2.

[56] Kim J U. On a stochastic plate equation. Appl. Math. Optim., 2001, 44: 33–48.

[57] Szymon P, Jerzy Z. Nonlinear stochastic wave and heat equations. Probab. Theory Relat. Fields, 2000, 116: 421–443.

[58] Peszat S, Zabczyk J. Nonlinear stochastic wave and heat equations. Probab. Theory Relat. Fields, 2000, 116(3): 421–443.

[59] Schurz H. Stochastic wave equations with cubic nonlinearity and Q-regular additive noise in $\mathbb{R}^2$. Disc. Cont. Dyn. Syst., 2011, 1299–1308.

[60] Millet A, Morien P L. On a stochastic wave equation in two space dimensions: regularity of the solution and its density. Stoch. Proc. Appl., 2000, 86: 141–162.

[61] Kovacs M, Larsson S, Saedpanah F. Finite element approximation of the linear stochastic wave equation with additive noise. SIAM J. Numer. Anal., 2010, 48(2): 408–427.

[62] Hausenblas E. Weak approximation of the stochastic wave equation. J. Comput. Appl. Math., 2010, 235: 33–58.

[63] Cohen D, Sigg M. Convergence analysis of trigonometric methods for stiff second-order stochastic differential equations. Numerische Mathematik, 2012, 121(1): 1–29.

[64] Lasiecka I, Lions J L, Triggiani R. Non-homogeneous boundary value problems for second order hyperbolic operators. J. Math. Pures Appl., 1986, 65(2): 149–192.

[65] Brzeźniak Z, Maslowski B, Seidler J. Stochastic nonlinear beam equations. Probab. Theory Relat. Fields, 2005, 132: 119–149.

[66] Chow P L. Stochastic wave equations with polynomial nonlinearity. Ann. Appl. Probab., 2002, 12(1): 361–381.

[67] Chow P L, Menaldi J L. Stochastic PDE for nonlinear vibration of elastic panels. Diff. Int. Equ., 1999, 12: 419–434.

[68] Quer-Sardanyons L, Sanz-Solé M. Space semi-discretisations for a stochastic wave equation. Potential Anal., 2006, 24: 303–332.

[69] Walsh J B. On numerical solutions of the stochastic wave equation. Illinois J. Math., 2006, 50: 991–1018.

[70] Qi R, Yang X, Zhang Y. Full-discrete finite element method for stochastic elastic equation driven by an additive noise. Numer. Meth. Part. Diff. Eqn., 2013, 29: 1946–1962.

[71] Qi R, Yang X. Weak convergence of finite element method for stochastic elastic equation driven by additive noise. J. Sci. Comput., 2013, 56: 450–470.

[72] Dean G. Duffy, Green's Function with Applications. Chapman and Hall/CRC, 2001.

[73] Cao Y, Yang H T, Yin L. Finite element methods for semilinear elliptic stochastic partial differential equations. Numer. Math., 2007, 106: 181–198.

[74] Cao Y, Chen Z, Gunzburger M. Error analysis of finite element approximations of the stochastic Stokes equations. Adv. Comput. Math., 2010, 33(2): 215–230.

[75] Brezzi F. On the existence, uniqueness and approximation of saddle point problems arising from Lagrange multipliers. RAIRO Numer. Anal., 1974, 8: 129–151.

[76] Brezzi F, Fortin M. Mixed and Hybrid Finite Elmement Methods. Springer-Series in Computational Mathematics 15, Springer-Verlag, 1991.

[77] Cao Y. Finite element and discontinuous galerkin method for stochastic helmholtz equation in two-and three-dimensions. J. Comp. Math., 2008, 26(5): 702–715.

[78] Buckdahn R, Pardoux E. Monotonicity methods for white noise driven quasi-linear PDEs. Diffusion processes and related problems in analysis, vol. 1 (Evaston IL, 1989), Progr. Probab. 22, Birkhauser, Boston, 1990, pp. 219–233.

[79] Babuska I, Chatzipantelidis P. On solving elliptic stochastic partial differential equations. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 2002, 191: 4093–4122.

[80] Lototsky S V, Rozovskii B L, Wan X. Elliptic equations of higher stochastic oreder. ESAIM: Math. Model. Numer. Anal. 2010, 44(05): 1135–1153.

[81] Yao R M, Bo L J. Discontinuous Galerkin method for elliptic stochastic partial differential equations on two and three dimensional spaces. Sci. China. Ser. A. Math., 2007, 1661–1672.

[82] Babuška I, Georgios E Z. Galerkin finite element approximations of Stochastic elliptic partial differential equations. SIAM J. Numer. Anal., 2004, 42: 800–825.

[83] Gyöngy I, Martinez T. On numerical solution of stochastic partial differential equations of elliptic type. Stoch. Int. J. Prob. Stoch. Proc., 2006, 78(4): 213–231.

[84] Zhang K, Zhang R, Yin Y, Yu S. Domain decomposition methods for linear and semilinear elliptic stochastic partial differential equations. Appl. Math. Comput., 2008, 195: 630–640.

[85] Matthies H G, Keese A. Galerkin methods for linear and nonlinear elliptic stochastic partial differential equations. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 2005, 194: 1295–1331.

[86] Subber W, Loisel S. Schwarz preconditioners for stochastic elliptic PDEs. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 2014, 272: 34–57.

[87] Yang X, Qi R. Nonconforming finite element method for Stochastic Stokes equations. Appl. Math. Model., 2013, 37: 6110–6118.

[88] Franco F, Dariusz G. Martingale and stationary solutions for stochastic Navier-Stokes equations. Probab. Theory Relat. Fields, 1995, 102: 367–391.

[89] Masuda K. Weak solutions of Navier-Stokes equations. Tohoku Math. J., 1984, 36(4): 623–646.

[90] Bensoussan A. Stochastic Navier-Stokes equations. Acta Appl. Math., 1995, 38(3): 267–304.

[91] Bensoussan A, Temam R. Equations stochastiques du type Navier-Stokes. J. Func. Anal., 1973, 13(3): 195–222.

[92] Capinski M, Cutland N J. Stochastic Navier-Stokes equations. Acta Appl. Math., 1991, 25: 59–85.

[93] Ciarlet P G. The Finite Element Methods for Elliptic Problems. North-Holland, New York, 1978.

[94] Crouzeix M, Raviart P A. Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations. RAIRO Sér. Rouge 7, 1973, 2: 33–75.

[95] Baeumer B, Geissert M, Kovács M. Existence, uniqueness and regularity for a class of semilinear stochastic Volterra equations with multiplicative noise. arxiv:1404.4131v2[math.PR] (2014).

[96] Kovács M, Printems J. Strong order of convergence of a fully discrete approximation of a linear stochastic Volterra type evolution equation. Math. Comp., posted online on January 27, 2014.

[97] Kovács M, Printems J. Weak convergence of a fully discrete approximation of a linear stochastic evolution equation with a positive-type memory term. J. Math. Anal. Appl., 2014, 413: 939–952.

[98] Adam Andersson, Mihály Kovács, Stig Larsson. Weak error analysis for semilinear stochastic Volterra equations with additive noise. http://arxiv.org/abs/1411.6476v1.

[99] McLean W, Thomée V. Numerical solution of an evolution equation with a positive-type memory term. J. Austral. Math. Soc. Ser. B, 1993, 35: 23–70.

[100] Lubich C, Sloan I, Thomée V. Nonsmooth data error estimates for approximations of an evolution equation with a positive-type memory term. Math. Comp. 1996, 65: 1–17.

[101] Calvo M P, Cuesta E, Palencia C. Runge-Kutta convolution quadrature methods for well-posed equations with memory. Numer. Math., 2007, 107(4): 589–614.

[102] Harris C B, Noren R D. Uniform ℓ^1 behavior of a time discretization method for a Volterra integrodifferential equation with convex kernel: stability. SIAM J. Numer. Anal., 2011, 49(4): 1553–1571.

[103] López-Marcos J C. A difference scheme for a nonlinear partial integrodifferential equation, SIAM J. Numer. Anal., 1990, 27: 20–31. MR 91e:65160.

[104] McLean W, Thomée V, Wahlbin L B. Discretization with variable time steps of an evolution equation with a positive type memory term, Applied Mathematics Report, vol. AMR93/18, School of Mathematics, University of New South Wales.

[105] Sanz-Serna J M. A numerical method for a partial integro-differential equation. SIAM J. Numer. Anal., 1988, 25: 319–327. MR 89d:65113.

[106] Xu D. Stability of the difference type methods for linear Volterra equations in Hilbert spaces. Numer. Math., 2008, 109(4): 571–595.

[107] Abukhaled M I, Allen E J. Expectation stability of second-order weak numerical methods for stochastic differential equations. Stoch. Anal. Appl., 2002, 20: 693–707.

[108] Andrea B. A finite element method for martingale-driven stochastic partial differential equations. Stoch. Anal. Appl., 2010, 4: 355–375.

[109] Annikam L. A Lax equivalence theorem for stochastic differential equations. J. Comput. Appl. Math., 2010, 234: 3387–3396.

[110] Aureli A, Gyongy I. On numerical approximation of stochastic Burgers' equation. Stoch. Calc. Math. Finan., 2006, 1: 1–15.

[111] Bao Jianhai, Aubrey Truman, Yuan Chenggui. Stability in distribution of mild solutions to stochastic partial differential delay equations with jumps. Proc. R. Soc. A, 2009, 465(2107): 2111–2134.

[112] Birkhoff G, Schultz M, Varga R. Piecewise Hermite interpolation in one and two variables with appliations to partial differential equations. Numer. Math., 1968, 11: 232–256.

[113] Boyce W E. Approximation solution of random ordinary differential equations. Adv. Appl. Prob., 1978, 10: 172–184.

[114] Burrage P. Runge-Kutta methods for stochastic differential equations. Ph.D. Thesis, Dept. Mathematics. The University of Queensland, Australia, 1998.

[115] Burrage K, Burrage P M. High strong order explicit Runge-Kutta methods for stochastic ordinary differential equations. Appl. Numer. Math., 1996, 22: 81–101.

[116] Burrage K, Burrage P M, Tian T. Numerical methods for strong solutions of stochastic differential equations: An overview. Proc. R. Soc. A: Math. Phys. Eng. Sci., 2004, 460: 373–402.

[117] Burrage K, Tian T. A note on the stability properties of the Euler methods for solving stochastic differential equations. New Zealand J. Math., 2000, 29: 115–127.

[118] Cabaña E. On barrier problems for the vibrating string. Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 1972, 22: 13–24.

[119] Capinski M, Cutland N J. Navier-Stokes equations with multiplicative noise. Nonlinearity, 1993, 6(1): 71–77.

[120] Carmona R, Nualart D. Random nonlinear wave equations: smoothness of the solutions. Probab. Theory Rel., 1988, 79(4): 469–508.

[121] Chueshov I D. Introduction to the Theory of Infinite-Dimensional Dissipative Systems. Acta, Kharkiv, 2002.

[122] Dimitra Antonopoulou, Georgia Karali. Existence of solution for a generlized Stochastic Cahn-Hilliard equation on convex domain. Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B, 2011, 16(1): 31–55.

[123] Douglas J, Ma J, Protter P. Numerical methods for forward-backward stochastic differential equations. Annals of Applied Probability, 1996, 6: 940–968.

[124] Duffie D, Epstein L G. Stochastic differential utility. Econometrica, 1992, 60(2): 353–394.

[125] Dunford N, Schwartz J T. Linear Operators. Part II. Spectral Theory. Self Adjoint Operators in Hilbert Space. Reprint of the 1963 original. Wiley Classics Library, A Wiley-Interscience Publication. John Wiley Sons, Inc., New York, 1988.

[126] Ekaterina T Kolkovska. Existence and regularity of solutions to a stochastic Burgers-type equation. Brazilian Journal of Probability and Statistics, 2005, 19: 139–154.

[127] Euler L. Principes géneraux du mouvement des fluides. Mém. Acad. Sci. Berlin, 1755, 11: 274–315.

[128] 弗里德曼. 随机微分方程及其应用. 科学出版社, 北京, 1983.

[129] Gong F, Hu Q. Generalized Wiener functionals, white noise distributions, and distributions on the real Schwartz spaces of generalized functions. Adv. Math., 2000, 29(2): 166–172.

[130] 龚光鲁. 随机微分方程引论. 北京大学出版社, 北京, 1995.

[131] Gonzalez O, Maddocks J H. Extracting parameters for base-pair level models of DNA from molecular dynamics simulations. Theor. Chem. Acc., 2001, 106: 76–82.

[132] Gyongy I. Lattice approximation for stochastic quasi-linear parabolic partial differential equations driven by space-time white noise II. Poten. Anal., 1999, 11: 1–37.

[133] Gyongy I. On finite difference schemes for degenerate stochastic parabolic partial differential euqations. J. Math. Sci., 2011, 179(1): 100–126.

[134] Gyongy I, Krylov N V. An accelerated splitting-up method for parabolic equations. SIAM J. Math. Anal., 2006, 37: 1070–1097.

[135] Gyongy I, Krylov N V. Expansion of solutions of parametrized equations and acceleration of numerical methods. Illionis J. Math., 2006, 50: 473–514.

[136] Gyongy I, Krylov N V. First derivative estimates for finite difference schemes. Math. Comp., 2009, 78: 2019–2046.

[137] Gyongy I, Krylov N V. Higher order derivative estimates for finite-difference schemes. Meth. Appl. Anal., 2009, 16: 187–216.

[138] Gyongy I, Nicolat K. Accelerated finite difference schemes for linear stochastic partial differential equation in the whole space. SIAM J. Math. Anal., 2010, 42: 2275–2296.

[139] Gyongy I, Nualart D. Implicit schemes for quasi-linear parabolic partial differential equation perturbed by space-time white noise. Stoch. Proc. Appl., 1995, 58(1): 57–72.

[140] Hamadene S. Backward-forward SDEs and stochastic differential game. Stoch. Proc. Appl., 1998, 77: 1–15.

[141] Hausenblas E. Finite element approximation of stochastic partial differential equations driven by poisson random method of jump type. SIAM. J. Numer. Anal., 2008, 46: 437–471.

[142] Hernández D B, Spigler R. A-stability of Runge-Kutta methods for systems with additive noise. BIT Numer. Math., 1992, 32: 620–633.

[143] Hernández D B, Spigler R. Convergence and stability of implicit Runge-Kutta methods for systems with multiplicative noise. BIT Numer. Math., 1993, 33: 654–669.

[144] Hu Y, Peng S. Solution of forward-backward stochastic differential equation. Probab. Theory Rel. Fields, 1995, 103: 273–283.

[145] Hyek Y. Semi-discretization of stochastic partial differential equation on R^1 by a finite-difference method. Math. Comput., 1999, 69: 653–666.

[146] Ito K. On stochastic differential equations. Mem. Amer. Math., 1951, 1: 34–49.

[147] Jan V N, Mark V, Lutz W. Maximal L^p-regularity for stochastic evolution equations. SIAM J. Math. Analysis, 2012, 44(3): 1372–1414.

[148] Jentzen A, Kloeden P E. The numerical approximation of stochastic partial differential equations. Milan J. Math., 2009, 77: 205–244.

[149] Jonathan C Mattingly. On recent progress for the stochastic Navier-Stokes equations. Journées Équations aux dérivées partielles, 2003, XV:viii+298.

[150] Kato T, Fujita H. On the nonstationary Navier-Stokes system. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova., 1962, 32: 243–260.

[151] Kato T. Strong L^p-solutions of the Navier-Stokes equations in R^m, with applications to weak solutions. Math. Zeit., 1984, 187(4): 471–480.

[152] Kloeden P E. The system deviation of higher order numerical methods for Stochastic differential equations. Milan J. Math., 2002, 70: 187–207.

[153] Kloeden P E, Platen E. Numerical solution of stochastic differential equations. Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[154] Kovacs M, Larsson S, Lindgren F. Weak convergence of finite element approximations of linear stochastic evolution equations with additive noise. BIT Numer. Math., 2012, 52(1): 85–108.

[155] Kushner H J. Probability Methods for Approximation in Stochastic Control and Elliptic Equations. Academic Press, New York, 1977.

[156] Ladyzhenskaya O. The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flows. 2nd edn. Gordon and Breach, New York, 1969.

[157] Larsson S. Nonsmooth data error estimates with applications to the study of long-time behavior of finite element solutions of semilinear parabolic problems. 1992. http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.28.1250.

[158] Liu Wenbin, Yan Ningning. A Posteriori Error Estimates for Optimal Control Problems governed by Parabolic Equations. Numer. Math., 2003, 93(3): 497–521.

[159] Mao X. Stochastic Differential Equations and Their Applications. Chichester: Horwood Publishing Series in Mathematics and Applications, 1997.

[160] Mariko N, Syoiti N. A new higher-order weak approximation scheme for stochastic differential equations and the Runge-Kutta method. Finance Stoch., 2009, 13: 415–443.

[161] Martin A, Prigarin S M, Winkler G. Exact and fast numerical algorithms for the stochastic wave equation. Int. J. Comput. Math., 2003, 80: 1535–1541.

[162] Marwan I A. Stability analysis of second-order weak schemes for multi-dimensional stochastic differential systems. J. Franklin. Inst., 2011, 348: 1245–1257.

[163] Mcdonald S. Finite difference approximation for linear stochastic partial differential equations with method of lines. Munich Personal RePEc Archive, 2006.

[164] Mikulevicius R, Rozovskii B L. Martingale problems for stochastic PDE's. Mathematical Surveys and Monographs Series, 1998, 64: 243–325.

[165] Mikulevicius R, Rozovskii B L. On Equations of Stochastic Fluid Mechanics. Boston: Birkhäuser, 2001.

[166] Mikulevicius R, Rozovskii B L. Global L_2-solutions of stochastic Navier-Stokes equations. Ann. Probab., 2005, 33(1): 137–176.

[167] Mikulevicius R, Rozovskii B L. Stochastic Navier-Stokes equations for turbulent flows. SIAM J. Math. Anal., 2004, 35(5): 1250–1310.

[168] Milstein G N. Numerical Integration of Stochastic Differential Equations. Mathematics and its application, Kluwer, Dordrecht, 1995.

[169] Milstein G N, Platen E, Schurz H. Balanced implicit methods for stiff stochastic systems. SIAM J. Numer. Anal., 1998, 35: 1010–1019.

[170] Navier C L. Memoire sur les lois du mouvement des fluides. Mem. Acad. Sci. Inst. France, 1822, 6: 389–440.

[171] Ohm M R, Lee H Y, Shin J Y. Error estimates for discontinuous Galerkin method for nonlinear parabolic equations. J. Math. Anal. Appl., 2006, 315: 132–143.

[172] Oksendal B. Stochastic Differential Equations. Springer-Verlag, Berlin, 2010.

[173] Omar M A, Aboul-Hassan A, Rabia S I. The composite Milstein methods for the numerical solution of Ito stochastic differential equations. J. Comput. Appl. Math., 2011, 235: 2277–2299.

[174] Omar M A, Aboul-Hassan A, Rabia S I. The composite Milstein methods for the numerical solution of Stratonovich stochastic differential equation. Appl. Math. Comput., 2009, 215: 727–745.

[175] Paquet L, Korikache R. Mixed finite element method for the heat diffusion equation in a random medium, Stochastics. Stochastics-An Internaltional J., 2006, 2: 1–39.

[176] Pardoux E, Peng S. Adapted solution of a backward stochastic differential equation. System and Control Letters, 1990, 14: 55–61.

[177] Peszat S, Zabczyk J. Stochastic evolution equations with a spatially homogeneous Wiener process. Stoch. Proc. Appl., 1997, 72(2): 187–204.

[178] Philip E Protter. Stochastic Integration and Differential Equations. Springer-Verlage, Berlin, 2004.

[179] Platen E. On weak implicit and predictor – corrector methods. Math. Comput. Simul., 1995, 38: 69–76.

[180] Printems J. On the discretization in time of parabolic stochastic partial differential equations. Math. Model. Numer. Anal., 2001, 35(6): 1055–1078.

[181] Safique A, Nigam C P, Soumyendu R. The fully implicit stochastic-α method for stiff stochastic differential equations. J. Comput. Phy., 2009, 228: 8263–8282.

[182] Saito Y, Mitsui T. T-stability of numerical scheme for stochastic differential equations. World Sci. Ser. Appl. Anal., 1993, 2: 333–344.

[183] Saito Y, Mitsui T. Stability analysis of numerical schemes for stochastic differential equations. SIAM J. Numer. Anal., 1996, 33: 2254–2267.

[184] Schurz H. Asymptotical mean square stability of an equilibrium point of some linear numerical solutions with multiplicative noise. Stoch. Anal. Appl., 1996, 14: 313–354.

[185] 邵灶甜. 关于Ito型随机微分方程解的稳定性的一个结果. 广西大学学报, 1982, 2: 103–106.

[186] Stokes G G. On the theories of the internal friction of fluids in motion. Trans. Cambridge Philos. Soc., 1845, 8: 75–102.

[187] Tocino A. Simplified order 4.0 weak Taylor schemes for additive noise. J. Comput. Appl. Math., 2009, 231: 154—159.

[188] Walsh J B. An introduction to Stochastic Partial Differential Equations. Springer, New York, 1986.

[189] Wang P, Liu Z. Split-step backward balanced Milstein methods for stiff stochastic systems. Appl. Numer. Math., 2009, 59: 1198–1213.

[190] Yan Ningning. Superconvergence analysis and a posteriori error estimation in finite element methods. Science press, Beijing, 2008.

[191] Yan Ningning. Superconvergence analysis and a posteriori error estimates of a finite element method for an optimal control problem governed by integral equations. Applications of Mathematics, 2009, 54(3): 267–283.

[192] Yoo H. An analytic approach to stochastic partial differential equations and its applications. Thesis, University of Minnesota, 1998.

[193] Zeghdane R, Abbaoui L, Tocino A. Higher-order semi-implicit Taylor schemes for Ito stochastic differential equations. J. Comput. Appl. Math., 2011, 236: 1009–1023.

[194] 泽夫司曲斯. 随机微分方程理论及其应用. 上海科学技术文献出版社, 上海, 1984.

[195] 张柄根, 赵玉芝. 科学与工程中的随机微分方程. 海洋出版社, 北京, 1980.

[196] Zhang T. Large deviations for stochastic nonlinear beam equations. J. Func. Anal., 2007, 248: 175–201.

[197] Clément P, Prato G D, Prüss J. White noise perturbation of the Equations of Linear Parabolic Viscoelasticity. Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste, XXIX, 1997, 207–220.

[198] Prüss J. Evolutionary Integral Equations and Applications, xxvi+366 pp. Birkhäuser Verlag, Basel 1993.